3º Ciclo de Primaria

Problema 09.

Un cuadrado de números se dice *mágico*, cuando está formado por números naturales distintos y se verifica que las sumas de cada fila, cada columna y cada diagonal son iguales. Completa el siguiente cuadrado de forma que resulte mágico:

16			**13**
		11	
9	**6**		
4			

Solución

1) La suma de la diagonal secundaria da como resultado 34 = 13 + 11 + 6 + 4; este valor debe ser la suma invariable para todas las filas, columnas y la otra diagonal.
2) En la columna primera, solo falta el valor 5.
3) En la fila primera, faltan 5 unidades, y los sumandos que faltan son el 3 y el 2 (se descarta la combinación 4-1, dado que aparece ya el 4).
4) En la columna segunda, faltan 25 unidades, y los sumandos que faltan son el 15 y el 10 (se descartan las combinaciones 14-11, 13-12, dado que aparecen ya el 11 y el 13).

16			13
5		11	
9	6		
4			

(paso 2)

16	3	2	13
5		11	
9	6		
4			

(paso 3)

16	3	2	13
5	10	11	
9	6		
4	15		

(paso 4)

5) En la fila segunda, solo falta el valor 8.
6) En la diagonal principal, faltan 8 unidades, y los sumandos que faltan son el 7 y el 1 (se descartan las combinaciones 2-6 y 3-5, dado que aparecen ya el 2, el 3 y el 5).

7) En la tercera fila, solo falta el valor 12; y en la cuarta fila, solo falta el valor 14.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6		
4	15		

(paso 5)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	
4	15		1

(paso 6)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(paso 7)

En el paso número 3, propusimos la solución 3 y 2, pero podríamos haber pensado que la solución 2 y 3 podrían llevarnos a otra solución. Si partimos de esa nueva situación llegaremos a incompatibilidades al avanzar en el cuadrado.

En el paso número 4 se puso en la segunda fila el número 10 y en la cuarta el número 15, de haberlo hecho al contrario sería imposible completar la primera fila ya que faltaría un 3 y se repetiría.

Cualquier otra combinación nos llevaría a incompatibilidades, siendo la solución propuesta la única posible.

Problema 10.

Dos ciclistas recorren una pista circular en el mismo sentido. El primero tarda en dar una vuelta dos minutos y medio, y el segundo dos minutos y 15 segundos. En un momento dado se encuentran en un punto, ¿cuánto tardarán en volver a encontrarse?

Solución

El primer ciclista tarda 2’30’’ en dar una vuelta, es decir, 150’’. El segundo ciclista tarda 2’15’’ en dar una vuelta, es decir, 135’’. Dado que $mcm(150,135) = 1350$, ambos ciclistas volverán a coincidir pasados 1350’’, es decir, 22’30’’. En este tiempo, el primer ciclista ha tenido tiempo de recorrer 9 vueltas a la pista, $1350 \div 150 = 9$; mientras que el segundo ha tenido tiempo de recorrer 10, $1350 \div 135 = 10$.

Vuelta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ciclista 1	2’30’’	5’00’’	7’30’’	10’00’’	12’30’’	15’00’’	17’30’’	20’00’’	**22’30’’**	
Ciclista 2	2’15’’	4’30’’	6’45’’	9’00’’	11’15’’	13’30’’	15’45’’	18’00’’	20’15’’	**22’30’’**

Problema 11

Cada vez que visito a mis abuelos me regalan una moneda de 1€ o una moneda de 2€ y como soy muy ahorrador guardo las monedas en mis tres huchas pero nunca mezclo las de distinto valor.

Un día hice recuento de mis ahorros y tenía en una hucha 20 monedas, en otra 50 y en la tercera 60. El día de mi cumpleaños invité a mis amigos y gasté todas las monedas de 2€ que había en una de las huchas y aún me quedaron el triple de monedas de 1€ que de 2€. ¿Cuánto dinero gasté en la invitación? ¿Cuánto dinero tenía aún ahorrado?

Solución

En total tenía 130 monedas. Después de gastar el contenido de una hucha, las monedas de 1€ triplicaban a las de 2€ por lo que las monedas que quedaban deben ser múltiplo de cuatro.

- Si gastó la hucha de 20 quedarían 130 – 20 = 110 que no es múltiplo de 4
- Si gastó la hucha de 50, le quedarían 130 – 50 = 80 que es múltiplo de 4
- Si gastó la hucha de 60, le quedarían 130 – 60 = 70 que no es múltiplo de 4

Gastó la hucha que contenía 50 monedas todas de 2€, en la invitación gastó 100€

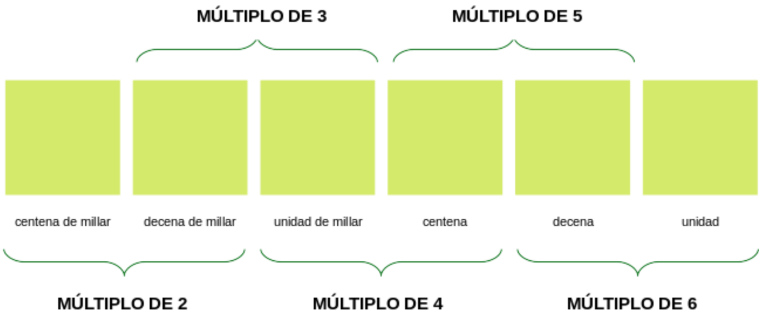
Las huchas que quedaron fueron la de 20 monedas y la de 60 monedas. Como las monedas de 1€ eran el triple que las de 2€, tenía 20 monedas de 2€ y 60 de 1€.

El total de dinero que aún tenía es: 40€ + 60€ = 100€

Problema 12

Paula ha olvidado la contraseña de su cuenta de *Instagram*. Solo recuerda que es un número de seis cifras distintas formada por los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

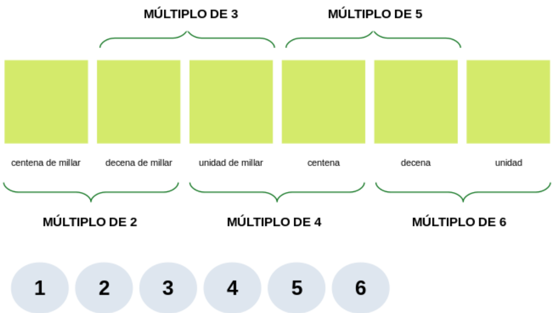
Para poder recuperarla en caso de olvido escondió este esquema en su cuaderno de matemáticas:



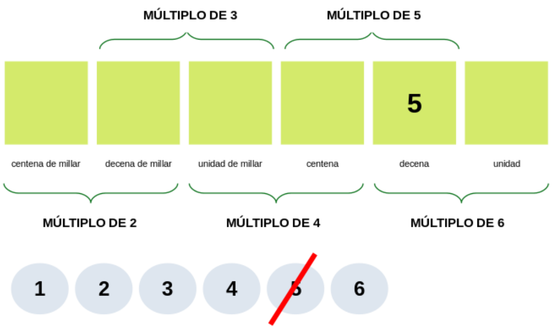
Sabiendo que la contraseña de la cuenta de *Instagram* de Paula es el mayor número que cumple todas las condiciones anteriores, ¿cuál es su contraseña?

Solución

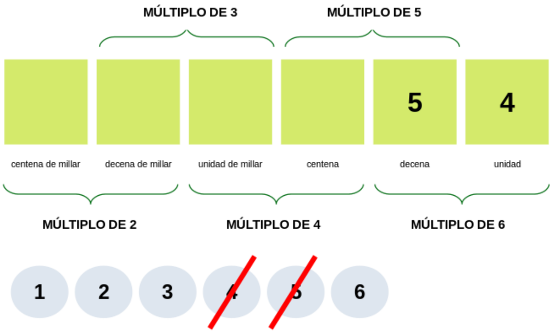
Tenemos que ubicar las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en las seis posiciones teniendo en cuenta las indicaciones dadas:



El número que ocupa las centenas y decenas debe ser múltiplo de 5. Obligatoriamente la posición de las decenas debe ser un 5.



El número que ocupa las decenas y unidades debe ser múltiplo de 6, es decir, de 2 y 3. Para ello la cifra de las unidades debe ser par, y la suma de ambas un múltiplo de 3. Obligatoriamente la posición de las decenas debe ser un 4.

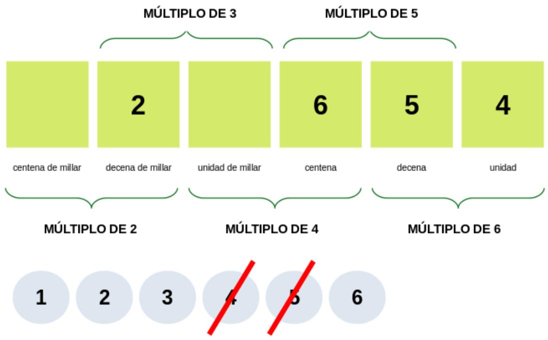


Para que el número formado por las centenas de millar y decenas de millar y el formado por las unidades de millar y centenas sean, respectivamente, múltiplos de 2 y 4, ambos deben acabar en cifra par.

Aparecen ahora dos posibilidades:

Opción 1.

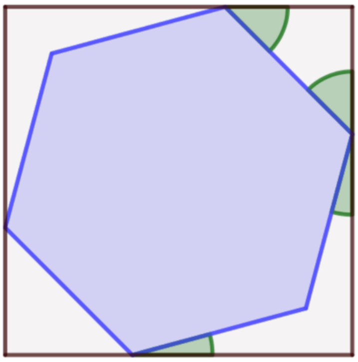
Colocamos un 2 en las decenas de millar y un 6 en las centenas.



Para que el número formado por las decenas de millar y unidad de millar sea múltiplo de tres, la única opción es colocar un 1 en las unidades de millar. Por tanto, colocamos el 3 en las centenas de millar.

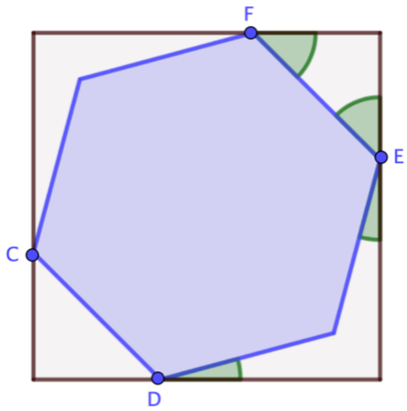
Problema 13.

El dibujo muestra un hexágono regular inscrito en un cuadrado. ¿Cuál es la suma de los cuatro ángulos coloreados de verde?



Solución

Vamos a definir algunos elementos en la figura anterior.



Las distancias de C, D, E y F a los vértices más próximo del cuadrado es la misma, formándose un triángulo equilátero con las esquinas superior derecha y los vértices E y F, así como la esquina inferior izquierda y los vértices C y D.

En ángulo en D es el mismo que se forma a la izquierda de F (lados paralelos que se cortan). Por tanto, la suma de los 4 ángulos es el doble de la suma de los dos ángulos que se forman en E.

Los ángulos interiores de un hexágono regular miden 120^{o}. Por tanto, la suma de los dos ángulos en E es 60^{o}. Entonces, la suma de los 4 ángulos señalados en verde es 120^{o}.

Otra forma de resolverlo sería considerar los triángulos rectángulos e isósceles que se forman en las esquinas, que al ser isósceles, cada uno de los ángulos verdes superiores serían de 45^{o}. Como el ángulo interior de un hexágono es de 120^{o}, el ángulo verde en el vértice E sería de 180^{o}- 45^{o}- 120^{o}= 15^{o}. Así pues, los cuatro ángulos verdes sumarían $2{\cdot}45^{o}+2{\cdot}15^{o}=120^{o}$.

Problema 14.

Te encuentras en el interior de una habitación cuadrada. Hay una puerta en cada una de las paredes y un número en cada una de las puertas. Es el número de la habitación a la que se accede a través de esa puerta.

Se trata, por supuesto, de alcanzar la salida a través del laberinto de habitaciones, donde abundan las trampas mortales. Pero existe una clave para reconocer las habitaciones trampa y llegar seguro a la salida.

Habitaciones trampa: su número tiene dos factores primos o más

Habitaciones seguras: su número tiene un único factor primo, es decir, es un número primo o la potencia de un número primo.

En el siguiente gráfico, cada casilla representa una habitación.

Encuentra el recorrido que has de seguir para encontrar la salida. ¿Cuántas habitaciones has tenido que visitar de las 120 habitaciones que se presentan el gráfico?

768	54	224	28	42	294	252	140	135	147	896	30
875	6	9	37	49	125	40	378	48	175	882	405
21		2	189	320	71	11	97	375	81	625	64
70	10	35	75	105	168	12	1331	980	89	210	289
126	79	29	19	243	32	4	13	360	169	20	61
567	729	420	90	14	50	63	450	160	343	486	53
41	3	96	250	24	120	43	25	73	512	504	256
67	80	17	27	83	361	5	192	640	15	98	8
7	112	121	162	300	630	245	56	18	31	23	59
16	47	128	270	45	448	384	150	686	SALIDA	84	60

Solución

Si vamos analizando las casilla que tenemos alrededor de la casilla de salida, la única solución posible sería pasar a la habitación con la puerta numerada con el 2, que es primo, el resto, 6, 21 y 10 son números que tienen dos divisores primos distintos.

Igual ocurre con la siguiente casilla, de las tres habitaciones colindantes, 9, 189 y 35, es la habitación número 9 la que cumple que solo tiene un divisor primo, el 3 al ser 9 el cuadrado de 3.

Avanzamos y vamos encontrando el único camino posible que es el que se representa a continuación, por lo que teniendo en cuenta la habitación de partida y la de salida, hemos visitado 50 habitaciones de las 120.

768	54	224	28	42	294	252	140	135	147	896	30
875	6	9	37	49	125	40	378	48	175	882	405
21		2	189	320	71	11	97	375	81	625	64
70	10	35	75	105	168	12	1331	980	89	210	289
126	79	29	19	243	32	4	13	360	169	20	61
567	729	420	90	14	50	63	450	160	343	486	53
41	3	96	250	24	120	43	25	73	512	504	256
67	80	17	27	83	361	5	192	640	15	98	8
7	112	121	162	300	630	245	56	18	31	23	59
16	47	128	270	45	448	384	150	686	⇓	84	60

Problema 15.

Alberto y Raquel están jugando a un juego nuevo que aprendieron en clase de Matemáticas: "Múltiplos y divisores". La partida se juega en un tablero en el que están colocados los números del 1 al 100 como el que ves a continuación:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Las reglas del juego son las siguientes:

1. Uno de los jugadores empieza rodeando un número cualquiera.
2. El siguiente jugador ha de rodear otro número que sea múltiplo o divisor del anterior.
3. Siguen así consecutivamente hasta que uno de los dos no puede encontrar ningún número disponible que sea múltiplo o divisor del que ha rodeado su contrincante. El que no pueda seguir será el perdedor.

Después de unas cuantas partidas, Raquel descubre una estrategia que permite ganar siempre a uno de los dos jugadores. ¿Qué jugador crees que llevará ventaja en este juego, el que empieza o el segundo? Encuentra una estrategia que permita ganar siempre a uno de los dos.

Solución

Para conseguir el objetivo de que el contrincante no tenga números para marcar, es preciso centrarse en los números primos, pues la única opción de marcar un divisor de los mismos es marcar el uno. El otro jugador podría marcar un múltiplo, pero ello se evita si comienzas marcando un número primo mayor de 50. La secuencia sería la siguiente:

- Primer jugador marca un número primo mayor que 50 (por ejemplo el 53).
- Segundo jugador sólo puede marcar el 1.
- Primer jugador marca otro número primo mayor que 50 y gana la partida.

Por lo tanto, el primer jugador tendrá ventaja sobre el segundo

Nota: El juego resulta muy interesante si se añade la obligatoriedad de empezar con un número par.

Problema 16.

El producto de las edades de mis hijos es 1664. La edad del más joven es la mitad de la del mayor. ¿Cuántos hijos tengo? ¿Cuáles son sus edades?

Solución

Vamos a descomponer el número 1664:

$$1664 = 2^7 \cdot 13$$

El problema nos habla de la edad de un mayor y la de un menor, siendo el mayor de doble edad que el menor. La edad del mayor debe ser un número par.

Si analizamos los casos uno a uno podremos ver que la única solución posible de agrupar edades en la descomposición con la condición de que el menor tenga la mitad de la edad que el mayor, o el mayor el doble que el menor, que es lo mismo, nos lleva a las edades:

$$8 = 2^3 \quad ; \quad 13 \quad ; \quad 16 = 2^4$$

Vamos a ver alguno de los razonamientos para diferentes opciones de edades de los hermanos

Edad del menor	Edad del mayor	
2	4	Imposible, ya que el 13 de la descomposición haría que la edad del mayor no pude ser 4
$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	Imposible también por la misma razón anterior
$8 = 2^3$	$16 = 2^4$	Aquí tendríamos la solución, siendo un tercer hermano de 13 años de edad
13	$26 = 2 \cdot 13$	En este caso nos quedaría en la descomposición 2^6, que son 64 años que repartir entre 13 y 26. Las potencias de 2 entre esos años es solo $2^4 = 16$, que pudiera ser siempre que mayor asumiera ese 2^2 que nos falta en la descomposición, pero se nos iría la edad del mayor a 104. Imposible
$26 = 2 \cdot 13$	$52 = 2^2 \cdot 13$	Imposible, nos quedaría solo $2^4 = 16$ en la descomposición de 1664, y la edad de 16 años o menos, haría imposible que el menor pudiera tener 26 años
52	104	Imposible por razones análogas al anterior, en este caso solo nos quedaría un tercer hermano con $2^2 = 4$ años.

Por lo tanto, tiene tres hijos y sus edades son 16, 13 y 8 años

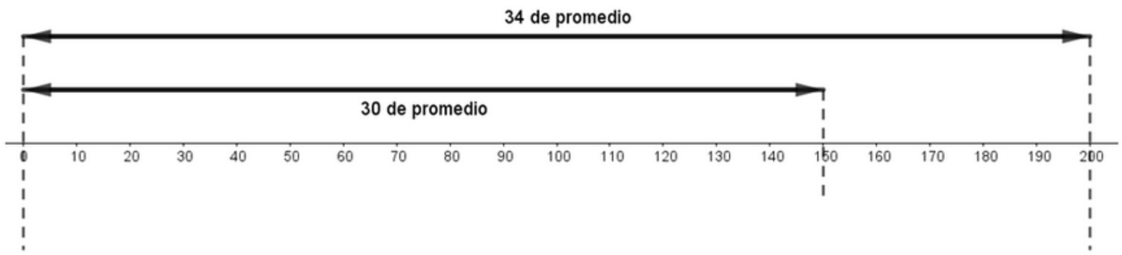
1º Ciclo E.S.O.

Problema 09.

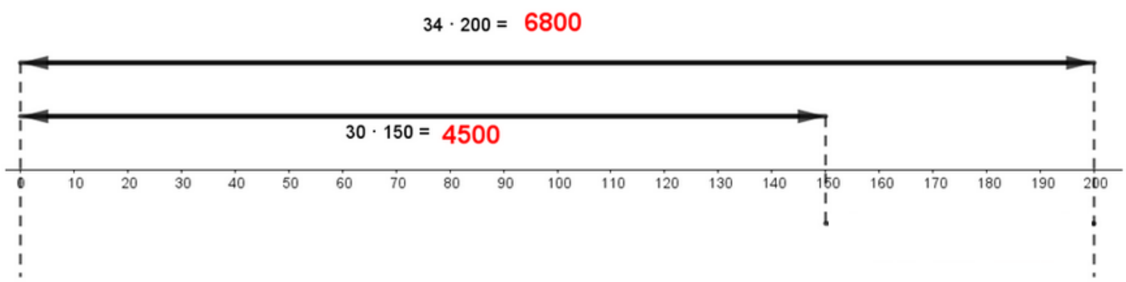
Tenemos una lista de 200 números. El promedio de la lista completa es 34, pero cuando eliminamos los últimos 50 números, entonces el promedio sale 30. ¿Cuál será el promedio de los números que hemos eliminado?

Solución

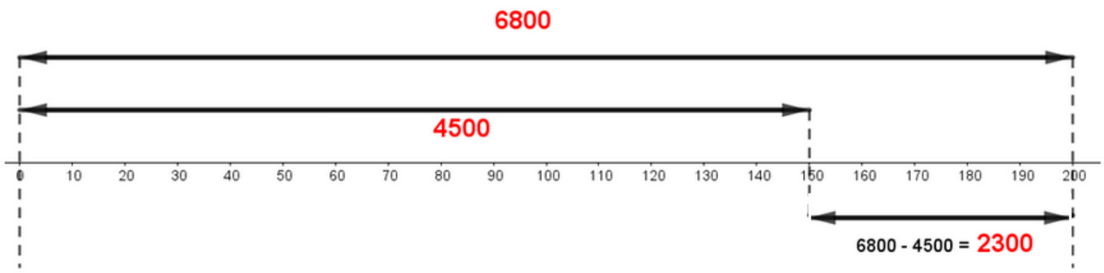
Para ayudar a la comprensión de la solución, veamos la siguiente imagen en la que relacionamos el promedio de los 10 primeros números con el promedio de los 200 números:



Con estos promedios, si multiplicamos los mismos por la cantidad de números a los que representan tendremos esta otra imagen:



Por lo que la suma de los últimos 50 números será de 6800 – 4500 = 2300:



Por tanto el promedio de esos últimos 50 números será:

$$\frac{2300}{50} = 46$$

Si utilizáramos nomenclatura de sumatorios finitos tendríamos el siguiente razonamiento, que en su esencia es el mismo que el anterior:

El promedio de los 200 números x_i es 34:

$$\sum_{i=1}^{200} \frac{x_i}{200} = 34$$

A su vez, el promedio de los primeros 150 números x_i es 30:

$$\sum_{i=1}^{150} \frac{x_i}{150} = 30$$

Esto quiere decir que los 200 números suman $34 \cdot 200 = 6800$, y a su vez, que los primeros 150 números suman $30 \cdot 150 = 4500$, de donde se deduce que los 50 números eliminados suman 2300:

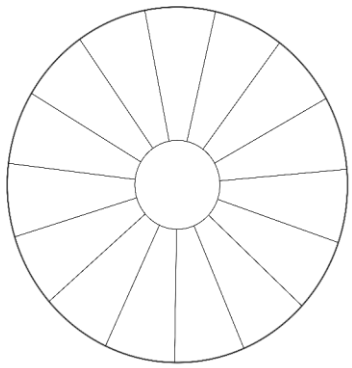
$$\sum_{i=1}^{200} x_i - \sum_{i=1}^{150} x_i = \sum_{i=151}^{200} x_i = 6800 - 4500 = 2300$$

Es decir, que el promedio de los 50 números eliminados es 46:

$$\sum_{i=151}^{200} \frac{x_i}{50} = \frac{2300}{50} = 46$$

Problema 10.

Para repartir un pastel circular entre 16 invitados se corta en el centro una porción circular de 3cm de radio y el resto se divide en 15 porciones iguales, que resultan del mismo tamaño que la porción central (observa la imagen con el esquema del reparto del pastel). Si quisiéramos dividir el mismo pastel y con el mismo procedimiento entre 25 invitados, ¿cuál debería ser el radio de la porción central?



Solución

La porción central de la tarta inicial se calcula mediante el área de un círculo de radio 3cm:

$$A_{central} = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi\ cm^2$$

Esta porción es la decimosexta parte del total del pastel, que tendrá una superficie total de:

$$A_{total} = 16 \cdot (9\pi) = 144\pi = \pi \cdot 12^2\ cm^2$$

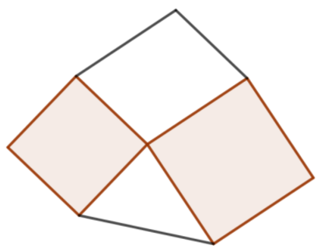
Es decir, el pastel tiene un radio total de 12cm. Para dividir el pastel entre 25 invitados, cada porción debe tener ahora una superficie de:

$$A_{porci\acute{o}n} = \frac{144\pi}{25} = \pi \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2\ cm^2$$

Es decir, que la porción central deberá tener ahora un radio de ${}^{12}/_{5}$ cm ($2{,}4cm$).

Problema 11.

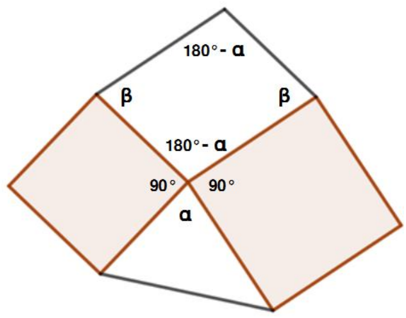
La siguiente figura está formada por dos cuadrados de lados 5 cm y 7 cm, un triángulo y un paralelogramo o romboide



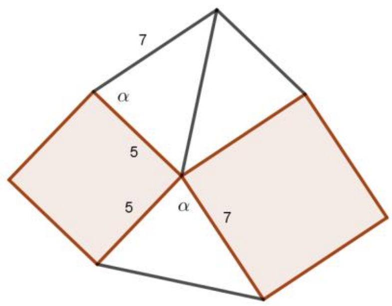
¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y el área del triángulo?

Solución

Vamos a demostrar que el área del triángulo es la mitad que el área del paralelogramo



2β + 2 (180° - α) = 360° ⇒ β = α



El triángulo dado, de lados **5 y 7 y α** el ángulo comprendido entre ellos, es igual que el formado al trazar una diagonal del paralelogramo, por lo que el área del paralelogramo es doble que el área del triángulo.

Problema 12

Halla dos números enteros positivos tales que su suma más su producto sea 34.

Solución

Si llamamos a los números x e y, se verifica: x + y + xy = 34
Sumando y restando 1, se tiene:

$$x + y + xy = x(y+1) + y + 1 - 1 = (x+1)(y+1) - 1 = 34$$

de donde:

$$(x+1)(y+1) = 35 \Rightarrow x+1 = 7 \ e \ y+1 = 5, \text{o viceversa}$$

Uno de ellos es 6 y el otro 4

Veamos otra forma de resolverlo: despejando x, se deduce que:

$$x = \frac{34 - y}{y+1} = -1 + \frac{35}{y+1}$$

Para que x sea entero, debe ser y + 1 divisor de 35 y esto solo ocurre cuando y +1 es igual a: 1,5,7 ó 35

- Si y + 1 = 1, y = 0 que no es posible
- Si y +1 = 5, **y = 4, en cuyo caso x = 6**
- Si y +1 = 7, **y = 6, en cuyo caso x = 4**
- Si y +1 = 35, y = 34, en cuyo caso x = 0 que no es posible

Problema 13.

Un club está formado por 500 personas. El pasado fin de semana organizó su tradicional *baile de primavera*. En esta ocasión, la entrada de los nuevos socios costaba 14 € y la de los veteranos 20 €. Al baile asistieron todos los nuevos socios y el 70% de los veteranos.

¿Cuál fue la recaudación total del baile?

Solución

El club está formado por 500 socios. Llamamos x al número de los nuevos socios, por lo que el número de socios veteranos será de 500 – x.

La recaudación que se obtiene por los nuevos socios a 14 euros la entrada será 14x.

Los socios veteranos que asisten son el 70% de los mismos, es decir que asistirán 0,7·(500 – x), que a un precio de 20 euros la entrada se recaudará 20·0,7·(500 – x).

Así pues, la recaudación total será de:

$$14x \ + \ 20 \cdot 0{,}7 \cdot (500 - x) = 14x + 14 \cdot 500 - 14x = \ 7000$$

La recaudación del baile fue de 7000 euros.

Problema 14.

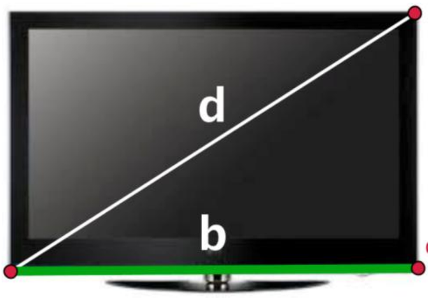
El tamaño de la pantalla de un televisor suele venir dado en pulgadas. El **número de pulgadas es la longitud de la diagonal**, siendo *1pulgada = 2,54cm*. Usando esta medida también puedes calcular la longitud (en cm) de la base de la pantalla, multiplicando por *1,524*.

Por ejemplo, una pantalla de 24 pulgadas tiene una diagonal:

$$d = 24\,pul \cdot 2{,}54\frac{cm}{pul} = 60{,}96cm$$

Y una base:

$$b = (nº\,pulgadas) \cdot 1{,}524 = 24 \cdot 1{,}524 = 36{,}58cm$$



1. ¿Cuánto miden, en cm, la diagonal y la base de una tele de 32 pulgadas?

Como recomienda la Asociación Nacional de Oftalmólogos, el tamaño de la pantalla debe estar relacionado con la distancia desde la que vemos la tele. Para calcular la *distancia mínima recomendada* (en cm), basta multiplicar el número de pulgadas por 4,4.

2. Si tenemos en cuenta el tamaño y la forma de la habitación, podemos poner el mueble con la tele a una distancia de entre 1,4 y 1,8m. ¿Qué tamaño máximo de pantalla debemos comprar?

3. Si la longitud de la mesa en la que queremos a poner la tele es de 40cm, ¿será suficiente para la televisión que nos queremos comprar?

4. Dibuja la gráfica de la función que relaciona **número de pulgadas de la pantalla** (variable independiente) con la **longitud (en cm) de la base** (variable dependiente).

5. Dibuja la gráfica de la función que relaciona **número de pulgadas de la pantalla** (variable independiente) con la **distancia (en cm) mínima recomendada** (variable dependiente).

Solución

Vamos a ir resolviendo los diferentes apartados:

Comenzamos con el cálculo de la diagonal y la base de un televisor de 32 pulgadas:

$$\mathrm{d} = 32\mathrm{pul} \cdot 2{,}54\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{pul}} = 81{,}28\ \mathrm{cm}\,;\quad \mathrm{b} = 1{,}524 \cdot 32 = 48{,}786\ \mathrm{cm}$$

Veamos ahora el tamaño máximo de la televisión que debemos comprar:

$$\mathrm{mínimadistancia\ recomendada\ (cm)};\quad \mathrm{n} = \mathrm{nº\ pulgadas} \Longrightarrow \mathrm{m} = 4{,}4 \cdot \mathrm{n}$$

$$1{,}4\mathrm{m} = 140\mathrm{cm} \Longrightarrow 140 = 4{,}4 \cdot \mathrm{n} \Longrightarrow \mathrm{n} = 31{,}8\ \mathrm{pulgadas}$$

$$1{,}8\mathrm{m} = 180\mathrm{cm} \Longrightarrow 180 = 4{,}4 \cdot \mathrm{n} \Longrightarrow \mathrm{n} = 40{,}9\ \mathrm{pulgadas}$$

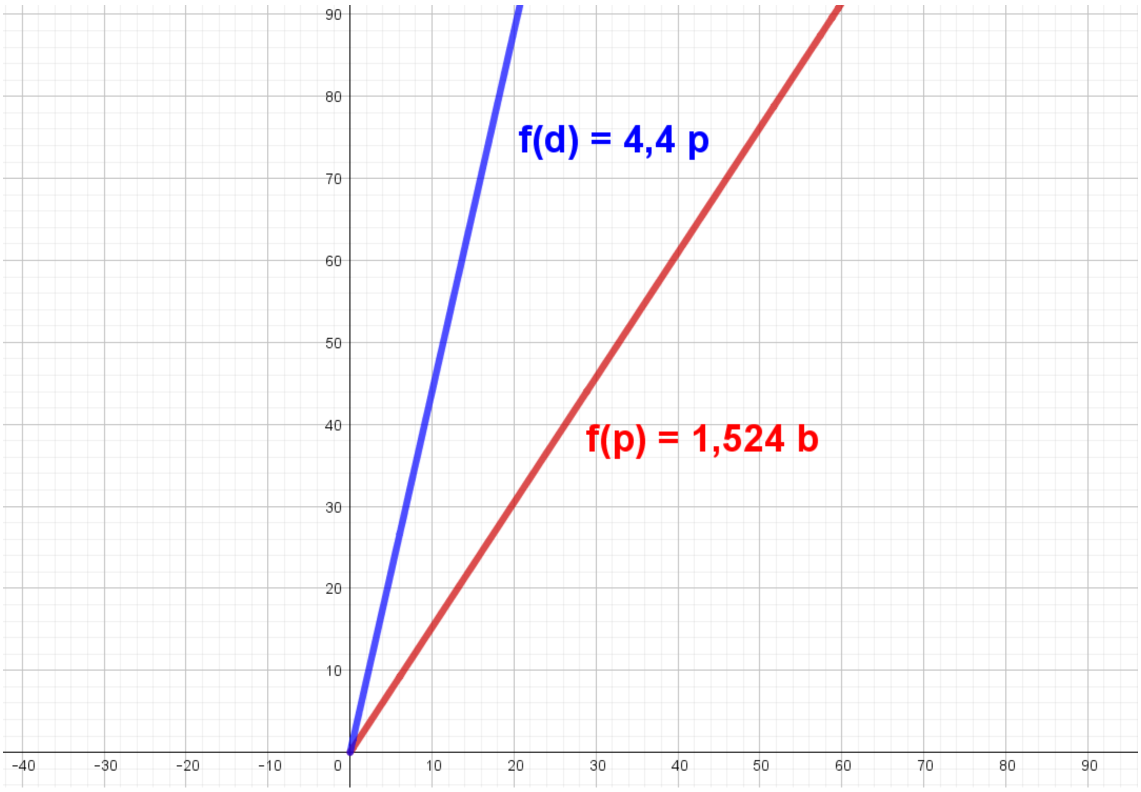
Comprobemos si tenemos suficiente con la mesa que tenemos para el televisor que deseamos comprar:

La pantalla más pequeña que podríamos comprar es de 32 pulgadas, y su base mide casi 49cm. Por tanto, la mesa es pequeña para cualquiera de las teles que podemos comprar.

Veamos ahora las gráficas que nos piden:

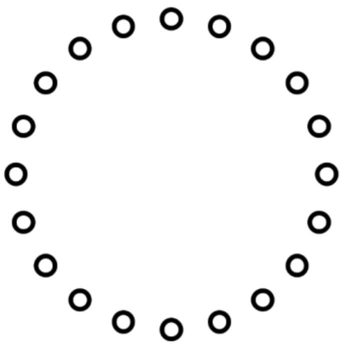
La primera de las gráficas va a relacionar el número de pulgadas con la dimensión de la base del televisor. Si p son las pulgadas y b la longitud de la base, la función sería $f(p) = 1{,}524 \cdot b$.

La segunda de las gráficas relaciona el número de pulgadas con la distancia mínima recomendada y se definiría de la forma $f(d) = 4{,}4 \cdot p$, siendo d la distancia mínima recomendada y p el número de pulgadas.



Problema 15.

Argitxu Azkarrena es campeona en lógica, la mejor de su clase. Argitxu tiene en su casa una ruleta de 20 posiciones, y se dedica a colocar los números del 1 al 20 de forma aleatoria en las posiciones de la ruleta. Argitxu observa lo siguiente: “Sea cual sea el reparto de los números, siempre hay dos números consecutivos cuyo producto vale 100, o más de 100”. Argitxu lleva razón, pero, ¿sabrías decir por qué?



Solución

La estrategia de *ensayo y error* permite a los estudiantes realizar alguna prueba preliminar para cerciorarse de que no es posible encontrar fácilmente ninguna colocación. Los sucesivos ensayos dejan a la vista las siguientes conclusiones:

$$20 \times 5 = 100 \qquad 19 \times 6 = 114 \qquad 18 \times 6 = 114$$

$$17 \times 6 = 102 \qquad 16 \times 7 = 112 \qquad 15 \times 7 = 105$$

$$14 \times 8 = 112 \qquad 13 \times 8 = 104 \qquad 12 \times 9 = 108$$

$$\text{Además } 11 \times 10 = 110$$

Es decir:

1. El 20 solo admite cuatro valores en posiciones adyacentes: 1, 2, 3, 4.
2. El 19, el 18 y el 17 admiten cinco: 1, 2, 3, 4, 5.
3. El 16 y el 15 admiten seis: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
4. El 14, el 13 y el 12 admiten siete: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
5. El 11 y el 10 admiten nueve: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Para que el producto de dos números adyacentes sea 100 o menor que 100, 11 de los números (del 10 al 20) solo aceptan como valor adyacente cualquiera de los otros 9 números (del 1 al 9).

Se da entonces la circunstancia de que se tienen 9 números para 10 posiciones, y por el *principio del palomar*, esto quiere decir que siempre habrá al menos dos números del 10 al 20 que tendrán que ser adyacentes, siendo su producto 100 o superior a 100.

Problema 16.

Don Roberto ha decidido iniciar a sus dos hijos Rocío y Ramón en las labores agrícolas y para ello le ha adjudicado a cada uno de ellos una parcela de terreno, de forma cuadrada, para que cultiven su propio huerto.

Rocío se queja a su padre porque las dimensiones de los lados de su parcela miden 5 metros menos que la de su hermano.

A lo cual Ramón le contesta que él tendrá mucho más trabajo porque la superficie que tiene que arar y preparar para realizar la plantación mide 175 m^2 más que la de ella.

¿Cuáles son las dimensiones de las parcelas que le ha sido adjudicada a cada uno de ellos?

Solución

Este problema se reduce en calcular dos números cuya diferencia sea 5 unidades y sus cuadrados se diferencien en 175 unidades y para ello lo resolvemos mediante una ecuación.

Llamemos "x" a las dimensiones de la parcela de Rocío y como la parcela de su hermano Ramón tiene 5 metros más de lado será "$x + 5$".

Con estos datos planteemos y resolvamos la siguiente ecuación (si restamos la superficie de la parcela mayor de Ramón y la superficie de la parcela menor de Rocío nos tiene que dar como resultado 175 m^2):

$$(x+5)^2 - x^2 = 175$$

$$x^2 + 10x + 25 - x^2 = 175$$

$$10x = 175 - 25 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{150}{10} = 15$$

La parcela de Rocío tiene 15 m de lado y la de su hermano Ramón mide 20 m de lado.

2º Ciclo E.S.O.

Problema 09.

Dos números de dos cifras terminan en 7 y las dos primeras cifras de su producto son iguales, así como las dos últimas. Halla estos dos números.

Solución

Ambos números deben ser de la forma $a7$ y $b7$, respectivamente. Al multiplicarlos, se tiene que la cifra de las unidades debe ser 9 (puesto que $7 \cdot 7 = 49$).Dado que las últimas dos cifras deben coincidir, la cifra de las decenas tiene que ser también 9:

$$7(a+b)+4=x9$$

Es decir, o bien los dígitos a y b suman 5 ($7 \cdot 5 + 4 = 39$), y entonces las opciones son:

$$49 \cdot 17 = 799$$

$$37 \cdot 27 = 999 \text{ ☑}$$

O bien los dígitos a y b suman 15 ($7 \cdot 15 + 4 = 109$), y entonces las opciones son:

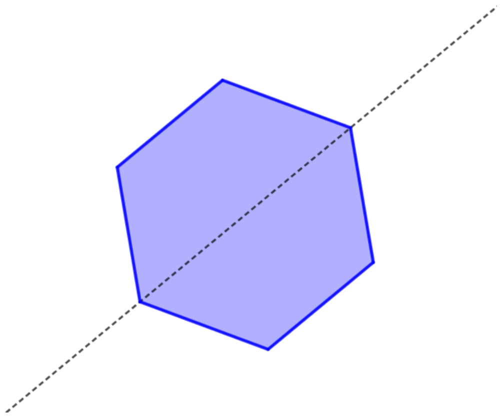
$$97 \cdot 69 = 6499$$

$$87 \cdot 77 = 6699 \text{ ☑}$$

Por lo tanto, existen dos soluciones: 37 y 27; y 87 y 77.

Problema 10.

Un hexágono regular gira alrededor de su diámetro o diagonal mayor. Calcula el volumen del cuerpo engendrado, sabiendo que dicho diámetro mide 2cm.



Solución

Al girar el hexágono sobre su diámetro, se obtiene un cuerpo compuesto por dos conos y un cilindro:

$$2 \cdot V_{cono} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

La altura de cono es $1/2$, y la altura del cilindro, 1. El cuadrado del radio de la base de ambos cuerpos se obtiene mediante Pitágoras:

$$r^2 = 1^2 - \left({}^1\!/_2\right)^2 = {}^3\!/_4$$

Se tiene entonces que el cuerpo de revolución tiene un volumen de:

$$2 \cdot V_{cono} + V_{cilindro} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi = \pi \; cm^3$$

Problema 11.

Hallar dos números enteros positivos a y b sabiendo que el resto de dividir a entre b es 53 y al dividir a entre b se obtiene 51,8548…..

Solución

Si a/b es 51,85…. el cociente es 51. En cualquier división entre números enteros se verifica: $D = d \,.\, c + r$ de donde $D/d = c + r/d.$

En este caso: $a/b = 51 + 53/b$ y $53/b = 0{,}8548\ldots$ de donde

$b = 53/0{,}8548\ldots$

Como 0,85 < 0,8548… < 0,86 se deduce:

$$\frac{1}{0{,}85} > \frac{1}{0{,}8548...} > \frac{1}{0{,}86} \Rightarrow \frac{53}{0{,}85} > \frac{53}{0{,}8548...} = b > \frac{53}{0{,}86} \Rightarrow 61{,}62\ldots < b < 62{,}35\ldots$$

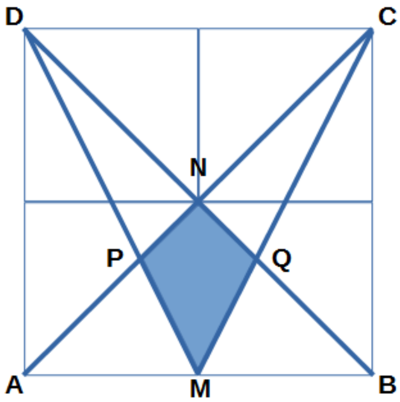
Como b es un número entero comprendido entre 61,62... y 62,35... debe ser

b = 62 y a = 62 · 51 + 53 = 3215.

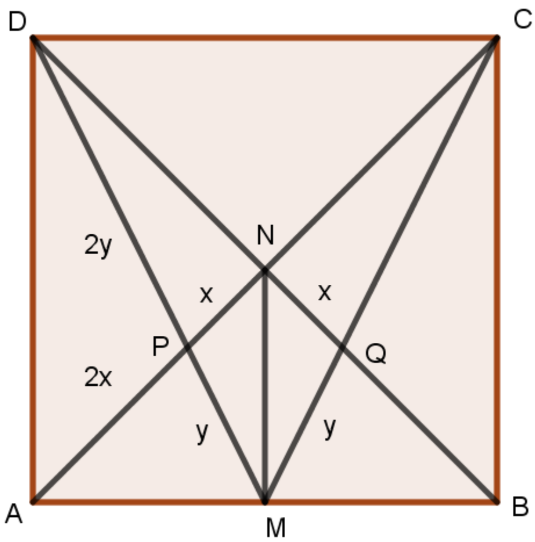
Los números a y b son: a = 3215 y b = 62

Problema 12.

En un cuadrado ABCD de lado 2 m, M es el punto medio del lado AB. Trazamos las dos diagonales y los segmentos CM y DM como en la siguiente figura. Halla el área y el perímetro del cuadrilátero MPNQ.



Solución



Si trazamos el segmento MN, los triángulos PMN y APD son semejantes por tener dos ángulos iguales: MPN = APD por opuestos por el vértice y ANM = 45º = DAP.

Como AD = 2 cm y MN = 1 cm, los lados de APD son doble que los de MPN, entonces: x + 2x es la mitad de la diagonal del cuadrado que mide $2\sqrt{2}$, luego:

$$3x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

También se verifica que DP = 2 PM, luego:

$$3y = DM = \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

El perímetro del cuadrilátero PMQN:

$$2x + 2y = \frac{2\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)}{3}$$

El área del cuadrilátero PMNQ es el doble que el área del triángulo PMN semejante al APD con razón de semejanza 2, luego el área de PMN es la cuarta parte del área de APD.

El área de APD es igual al área de ADN (cuarta parte del cuadrado) menos el área de PND triángulo rectángulo en N y cuyos catetos son x y DN =$\sqrt{2}$
Área de APD es:

$$1 - \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{2}{3}\ cm^2$$

entonces el área de PMN será:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}\ \mathrm{cm}^2$$

El área del cuadrilátero PMQN será el doble del área PMN, por tanto, la solución pedida es:

$$A_{PMQN} = \frac{1}{3}\ cm^2$$

Problema 13.

Un mendigo, pobre pero listo, pidió hospitalidad a un avaro, egoísta y de pocas luces, haciéndole la siguiente proposición:

"Yo le pagaré 10€ por el primer día, 20€ por el segundo, 30€ por el tercero y así sucesivamente, durante 30 días; en cambio usted me dará 1 céntimo de euro el primer día, 2cent el segundo, 4cent el tercero y así sucesivamente durante los 30 días".

El avaro encontró interesante la propuesta y consintió con este arreglo. Liquida la cuenta al cabo de los 30 días.

Solución

Las dos progresiones que se utilizan son una primera aritmética, que es la que le propone el mendigo al avaro para abonarle la hospitalidad, y una segunda geométrica que es lo que el avaro deberá abonar al mendigo.

La primera de ellas es una P.A. (a_n) progresión aritmética con $a_1 = 10€$ y $d = 10$, mientras que la segunda es una P.G. (b_n) progresión geométrica con $b_1 = 0{,}01€$ y $r = 2$.

Vamos a comenzar con la P.A. a_n son los euros que pagará el mendigo al avaro el día n-ésimo. El término general de dicha progresión es:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot db_n = 10 \cdot n$$

y la deuda del mendigo con el avaro: $a_1 + \cdots + a_{30} = S_{30}$:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 4650€$$

Veamos ahora lo que deberá abonar el mendigo al avaro, que como hemos dicho es una P.G. (b_n) son los euros que deberá pagar el avaro al mendigo el día n-ésimo. El término general de dicha progresión en este caso sería:

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} \Longrightarrow b_n = 0{,}01 \cdot 2^{n-1}$$

y la cantidad que deberá pagar el avaro al mendigo: $b_1 + \cdots + b_{30} = S_{30}$:

$$S_{30} = \frac{a_1 \cdot (r^{30} - 1)}{r - 1} = 10737418{,}23€$$

Por tanto, a final de mes el avaro le debe al mendigo 10 737 418’23 €, casi 11 millones de euros.

El saldo final es: 10 737 418,23 – 4 650 = 10 732 768,23€ a favor del mendigo.

Problema 14.

¿Te atreves a intentar encontrar todas las soluciones de esta bonita ecuación? (si es que tiene alguna)

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2 - 11x + 30} = 1$$

Solución

Para que una potencia de como resultado 1, o la base debe ser 1 y el exponente cualquier número que no sea cero, o también la base -1 y el exponente par. También podremos conseguir que la potencia sea igual a 1 con la base pudiendo ser cualquier número real, exceptuando el cero, y el exponente cero.

En resumen, estas son las condiciones:

$$a^b = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a = 1\ (b\ \in \mathbb{R}) \\ a = -1\ (b\ \text{par}\ ) \\ b = 0\ (\text{con}\ a \neq 0) \end{cases}$$

Vamos a ir resolviendo cada uno de los casos, en primer lugar igualemos la base a 1, y veamos cuántas soluciones podremos encontrar:

$$x^2-7x+11=1 \Longrightarrow x^2-7x+10=0 \Longrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$$

Las dos potencias encontradas serían:

$$(5^2-7\cdot 5+11)^{5^2-11\cdot 5+30}=1^0=1 \Longrightarrow \text{(sería una solución)}$$

$$(2^2-7\cdot 2+11)^{2^2-11\cdot 2+30}=1^{12}=1 \text{ (sería otra solución)}$$

Ahora resolvamos con la base igual a -1:

$$x^2-7x+11=-1 \Longrightarrow x^2-7x+12=0 \Longrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 1}{2}=\begin{cases} x=4 \\ x=3 \end{cases}$$

En este caso las potencias serían:

$$(4^2-7\cdot 4+11)^{4^2-11\cdot 4+30}=(-1)^2=1 \Longrightarrow \text{(sería una tercera solución)}$$

$$(3^2-7\cdot 3+11)^{3^2-11\cdot 3+30}=(-1)^6=1 \text{ (sería una cuarta solución)}$$

Vamos a igualar ahora el exponente a cero y comprobemos las soluciones que podamos encontrar:

$$x^2-11x+30=0 \Longrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 1}{2}=\begin{cases} x=6 \\ x=5 \end{cases}$$

Y por último las potencias serían: (probaremos solo con $x=6$, ya que $x=5$ ya la hemos comprobado y era la primera de las soluciones encontradas).

$$(6^2-7\cdot 6+11)^{6^2-11\cdot 6+30}=5^0=1 \Longrightarrow \text{(sería la última solución)}$$

Resumiendo resultados, las soluciones para esta ecuación son:

$$x=2; \quad x=3; \quad x=4; \quad x=5 \quad y \quad x=6$$

Problema 15.

Con motivo de su aniversario, el restaurante "***La Recta Dorada***" que está formado por el dueño y trece empleados ha decidido hacer un descuento en sus servicios.

Ofrece tres tipos de servicios:

- Si el cliente decide consumir en el restaurante tendrá un descuento de 5€ en el total de la cuenta.

- Si por el contrario el cliente desea recogerlo en el restaurante y llevárselo, el descuento en el total será de 3€.
- Pero si el cliente prefiere que le sea servido en su domicilio el descuento será solo de 1´5€.

Al cerrar la jornada, el dueño hizo la caja y observo que la cantidad total de descuentos ascendía a 294€ con un total de 80 servicios, fue el mejor día desde que reabrieron después de la crisis. El dueño reunió a su plantilla y les dijo: “Enhorabuena, ha sido nuestro mejor día, como curiosidad os diré que el número de servicios que hemos dado para consumir en el restaurante ha sido el triple del número de mis trabajadores”.

a) ¿Sabrías decir que caja hizo ese día el restaurante, sabiendo que la media de cada servicio fue de 21´65€?
b) ¿Cuántos servicios de cada tipo vendió el restaurante ese día?

Solución

Apartado a)
Total de caja: número de pedidos x valor medio de pedidos.

Total: 80 x 21´65= 1732€

Apartado b)
Llamemos x al número de servicios para recoger en el restaurante, y el número de servicios para llevar a domicilio, y z al número de servicios que se tomaron en el restaurante.

Según la información que nos proporcionan obtenemos:

$$\begin{cases} 3x + 1´5y + 5z = 294 \\ x + y + z = 80 \end{cases}$$

Por otro lado, el enunciado nos dice que z es el triple de empleados que según el enunciado son 13, por lo tanto $z = 13 \cdot 3 = 39$ (número de servicios en el propio restaurante, sustituyendo en z en el sistema anterior obtenemos un nuevo sistema 2x2:

$$\begin{cases} 3x + 1´5y + 5 \cdot 39 = 294 \\ x + y + 39 = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1´5y = 99 \\ x + y = 41 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son x=25 e y =16.

Por tanto se hicieron 25 servicios que se recogieron en el restaurante, 16 que se sirvieron a domicilio y los restantes 39 se sirvieron en el local del restaurante.

Problema 16.

Helena me dijo que le gustan los números que tienen un 7 entre sus cifras. Entonces le propuse un juego: elegir un número al azar entre uno y un millón, si tiene un 7 entre sus cifras gana ella y si no ganaría yo. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar en este juego? ¿Cuál sería esa probabilidad?

Solución

El problema se reduce a conocer la probabilidad de que un número entre 1 y un millón tenga o no un 7 entre sus cifras. Los números de hasta 6 cifras que podemos escribir sin emplear el 7 serían las variaciones con repetición de 9 elementos tomados de 6 en 6.

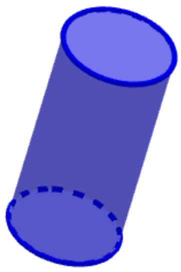
Números "sin el 7" = VR (9, 6) = 9^6 = 531.441

Es decir, la probabilidad de que gane yo es mayor, aproximadamente de 0,53.

Bachillerato

Problema 09.

Un cilindro tiene una altura de 4 cm y el radio de su base mide 1 cm, estando ambas medidas obtenidas con un *error absoluto* menor que una décima de milímetro. Obtén un *intervalo de acotación* para el volumen.



Solución

Se tiene que el volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h$$

El error absoluto viene dado en milímetros, luego haremos las comprobaciones en esta unidad:

$$V = \pi \cdot (r \pm 0{,}1)^2 \cdot (h \pm 0{,}1)$$

Se puede desarrollar esta expresión, en función de las potencias de 0,1:

$$V = \pi r^2 h \pm 0{,}1\pi(r^2 + 2rh) \pm 0{,}1^2\pi(2r + h) \pm 0{,}1^3\pi$$

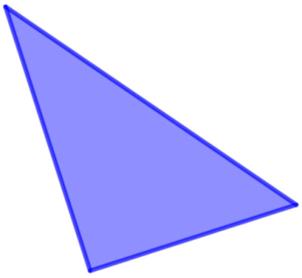
Para los datos del problema, se tiene que:

$$V = 12566.37 \pm 284.63 \; mm^3$$

$$V = 12.57 \pm 0.29 \; cm^3$$

Problema 10.

Comprueba que un triángulo de lados $2m$, $m^2 - 1$ y $m^2 + 1$ es rectángulo. A continuación, demuestra que, al unir el punto medio de la hipotenusa de este triángulo con su vértice opuesto, se obtienen dos triángulos isósceles.



Solución

Un triángulo de lados $2m$, $m^2 - 1$ y $m^2 + 1$ es rectángulo, puesto que:

$$(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2$$

En este triángulo, los valores $2m$ y$m^2 - 1$ corresponden, pues, a los catetos, y el valor $m^2 + 1$a la hipotenusa. Si se toma el origen del plano cartesiano, O, como vértice de ángulo recto, con el cateto $m^2 - 1$ sobre el eje de abscisas y el cateto $2m$ sobre el eje de ordenadas, el punto medio de la hipotenusa, A, tiene coordenadas:

$$A = \left(\frac{m^2 - 1}{2}, \frac{2m}{2}\right)$$

Y la distancia del punto A al origen es, una vez más:

$$dist(A, O) = \sqrt{\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2} = \frac{m^2 + 1}{2}$$

Es decir, la mediana AO mide exactamente la mitad de la hipotenusa, por lo que los triángulos formados en el interior son ambos isósceles.

Problema 11.

Hallar todos los números naturales x e y con $x < y$ tales que la suma de todos los naturales estrictamente comprendidos entre ambos sea igual a 2021.

Solución

Los números comprendidos estrictamente entre x e y son:

$$x+1, x+2, \dots\dots. y-2, y-1$$

y en total hay: $y-x-1$ números.

Su suma es:

$$\frac{(x+1+y-1)\cdot(y-x-1)}{2} = 2021$$

de donde:

$$(x+y)(y-x-1) = 4042 = 2 .43 .47$$

si 4042 lo descomponemos en producto de dos factores, puede ocurrir:

$$4042 = 4042 .1$$

$$4042 = 2021 .2$$

$$4042 = 94 .43$$

$$4042 = 86 .47$$

Resolviendo los siguientes sistemas de ecuaciones, se obtienen las soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=4042 \\ y-x-1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2022; \quad x=2020$$

$\text{Siendo } 2021 = 2021\ (solución\ trivial)$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2021 \\ y-x-1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1012; \quad x=1009$$

$\text{Siendo } 2021 = 1010+1011$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=94 \\ y-x-1=43 \end{array}\right\} \Rightarrow y=69; \quad x=25$$

$\text{Siendo } 2021 = 26+27+28+29+30+\cdots+67+68$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=86 \\ y-x-1=47 \end{array}\right\} \Rightarrow y=67; \quad x=19$$

$\text{Siendo } 2021 = 20+21+22+\cdots+64+65+66$

Problema 12.

Sean x e y enteros positivos que verifican:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{35}$$

Encuentra el menor valor posible de $x + y$.

Solución

Efectuando operaciones resulta:

$$\frac{x+y}{\text{xy}}=\frac{2}{35}\Rightarrow 35(x+y)=2\text{xy}$$

Si llamamos a la suma $x+y = S$ y al producto $xy = P$, tendremos que:

$$P=\frac{35(x+y)}{2}$$

x e y son las soluciones de la ecuación de segundo grado $\alpha 2 - S\,\alpha + P = 0$ y sustituyendo el valor de P se obtiene:

$$2\alpha^2-2S\alpha+35S=0\Rightarrow \alpha=\frac{S\pm\sqrt{S^2-70S}}{2}$$

Como *x e y* son enteros debe ser el discriminante de la ecuación: $S2 - 70\,S = S(S - 70)$ cuadrado perfecto y *S* mayor o igual que 70.

Como buscamos el menor valor de *S*, debe ser *S = 70* que corresponde a los valores:

x = 35 = y El menor valor de S = x + y es 70

Otra forma:

$\frac{x+y}{\text{xy}}=\frac{2}{35}\Rightarrow \text{x}+\text{y}=2\text{k y xy}=35\text{k};$ x e y son las soluciones de la ecuación de segundo grado:$\alpha^2 - 2k\alpha + 35k = 0 \Rightarrow \alpha=k\pm\sqrt{k^2-35k}$ y como x e y son números enteros debe ser $k^2 - 35k = k(k - 35)$ un cuadrado perfecto y k mayor o igual que35. El menor valor de *k* es *k = 35* y en consecuencia **x + y = 2*k* = 70**

Una tercera forma:

La media armónica de dos números no nulos se define:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2\text{xy}}{x+y}$$

Entre las medias armónica (H), geométrica (G), aritmética (A) y cuadrática (C) se verifican las desigualdades:$H\leq G\leq A\leq C$ La igualdad se verifica cuando x = y.

Utilizando la desigualdad entre las medias armónica y la aritmética de x e y:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \frac{2}{\frac{2}{35}} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 \leq x+y$$

Si la suma x + y es mayor o igual que 70, el menor valor de la suma es 70. La igualdad entre las medias se da cuando los números son iguales es decir x = y = 35

Problema 13.

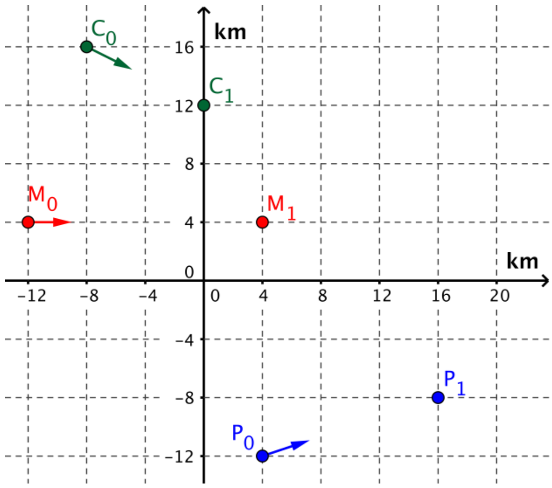
Martina es controladora aérea y trabaja en la torre de control de un aeropuerto. En este momento, está controlando el vuelo de tres aviones.

El primero es un avión de carga C, (representado de color verde en el diagrama). El segundo es un avión militar M (en rojo) y el tercero, uno de pasajeros P (en azul).

El gráfico siguiente muestra lo que Martina va viendo en la pantalla de su radar. Se pueden observar dos posiciones de cada avión.

Las primeras (***C_0***, ***M_0***, ***P_0***) muestran dónde se encontraban los aviones en el instante inicial (***t=0***).

Las segundas (***C_1***, ***M_1***, ***P_1***), dónde se están los aviones en el instante ***t = 1min***.



1. Calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{C_0C_1}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_1}$.
2. Calcula la velocidad a la que se mueve el avión militar, expresada en *km/h*.
3. Calcula el error relativo que se comete al aproximar a las decenas la velocidad (en *km/h*) del avión de carga. Expresa ese error en forma de porcentaje y con una precisión de centésimas.
4. ¿Cuántos metros supone ese error en 1 minuto de desplazamiento?
5. Calcula las ecuaciones de las trayectorias de los tres aviones.

6. Calcula también los puntos de intersección de las trayectorias.

7. Supongamos que los tres aviones vuelan a la misma altitud y que sus velocidades son constantes. Analiza si en los puntos de intersección de las trayectorias se produce una colisión entre aviones. Propón una solución a Martina para los casos en los que sí colisionen dos aviones.

Solución

Vamos a utilizar vectores, y calcularemos su módulo para resolver la primera de las cuestiones:

$$\overrightarrow{C_0C_1} = (8, -4) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{C_0C_1}\right| = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (16{,}0) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| = 16$$

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (12{,}4) \Longrightarrow \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = 4\sqrt{10}$$

Veamos la segunda cuestión, para ello vemos que las dos posiciones M_0 y M_1 hay 16 km de distancia. a convertir a km/h las unidades

$$V_M = 16\frac{km}{min} \cdot \frac{60\ min}{1h} = 960\ \frac{km}{h}$$

La tercera de las cuestiones tiene por solución:

$$V_C = 4\sqrt{5}\ \cong 540\,\frac{km}{h} \Longrightarrow E_a \cong 3{,}3437\frac{km}{h} \Longrightarrow E_b \cong 0{,}0062 = 62\%$$

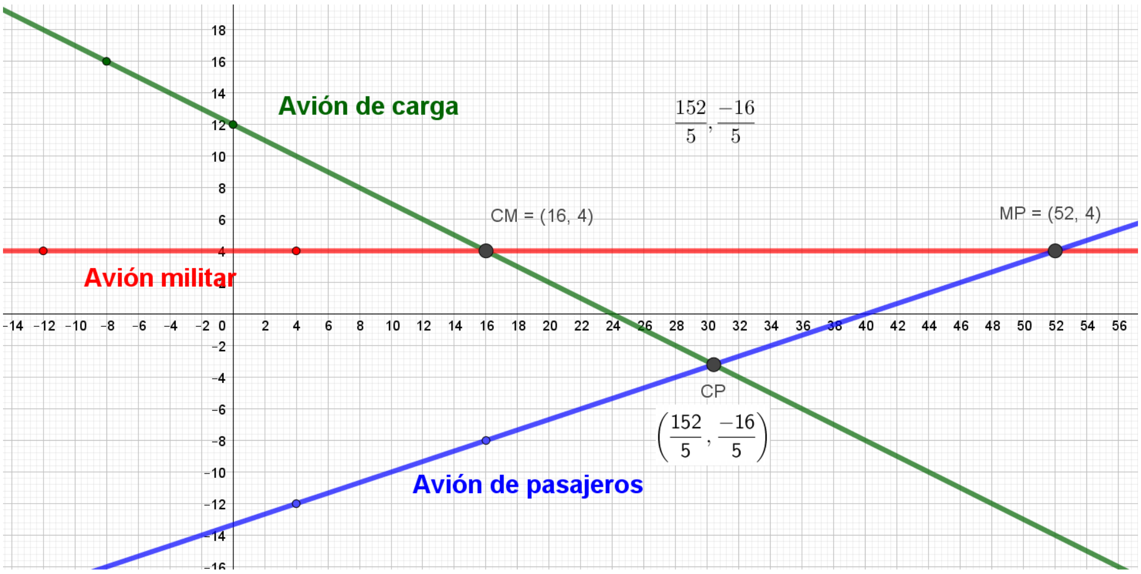
Los metros que supone ese error serán aproximadamente:

$$E_a \cong 3{,}3437\frac{km}{h} \cdot \frac{1h}{60\ min} \cdot \frac{1000\ m}{1km} \cong 56\frac{m}{min}$$

Veamos ahora las ecuaciones de las trayectorias de los tres aviones.

Avión de pasajeros	Avión militar	Avión de carga
$x - 3y = 0$	$y = 4$	$x + 2y = 24$

Para hallar los puntos de intersección de las trayectorias podremos representar con GeoGebra las rectas que definen las trayectorias de los aviones, o bien ir resolviendo dos a dos los sistemas que forman sus ecuaciones.



Y finalmente, se produciría una colisión entre el avión militar y el de pasajeros en el instante t = 4 min. En el resto de puntos de intersección no se producen colisiones porque un avión pasa antes que el otro.

Para evitar la colisión basta con cambiar la velocidad de uno de los dos aviones.

Problema 14.

Los hermanos Doltan forman una banda de cuatro timadores de poca monta que acaban comprarse unos dados y unas monedas trucadas. El sitio de Internet donde han conseguido estos objetos afirma en su página web que pueden fabricar dados y monedas cuyas caras tienen distintas probabilidades de salir.

Con estos dados y monedas pretenden timar a los incautos que acepten apostar con ellos en varios juegos de azar, aprovechando la ventaja que les da conocer que tanto dados como monedas están trucados.

Las caras de los dados comprados por los Doltan tienen una probabilidad de salir indicada en la tabla:

cara	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***
probabilidad	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{12}$

En estos dados, las caras 1 y 6 tienen una probabilidad de salir distinta al resto de caras.

1. ¿Cuántas veces es más probable obtener un 1 que obtener un 2 con uno de estos dados?

2. Uno de los juegos en los que los Doltan pretenden usar sus dados es el de lanzar dos dados y sumar las caras obtenidas. Escribe el espacio muestral de este experimento aleatorio.

3. En el juego lanzar dos dados y sumar las caras, si jugamos con unos dados normales, la probabilidad de obtener 12 es menor que si jugamos con los dados trucados. Calcula el porcentaje de aumento de la probabilidad de sacar 12 cuando jugamos con dados trucados.

4. Los hermanos Doltan también quieren probar con el juego de lanzar un dado y luego una moneda. Dibuja el diagrama de árbol asociado este juego.

5. Para hacerse una idea de cómo deben apostar, los Doltan calculan las probabilidades de todos los posibles resultados del juego *lanzar un dado y una moneda*, jugado con el dado y la moneda comprados en Internet. Las probabilidades de estos objetos trucados aparecen en las siguientes tablas:

	DADO						***MONEDA***	
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***cara***	***cruz***
probabilidad	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Calcula la probabilidad de obtener:

a) un 6 y una cruz | ***b)*** un 3 y una cara | ***c)*** un 2 y una cruz | ***d)*** numero par y cara

Solución

Primera cuestión: Es 10 veces más probable sacar 1 que sacar 2.

$$\frac{\mathrm{P}(1)}{\mathrm{P}(2)} = \frac{5/12}{1/24} = 10$$

Segunda cuestión:

$$\mathrm{E} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Tercera de las cuestiones:

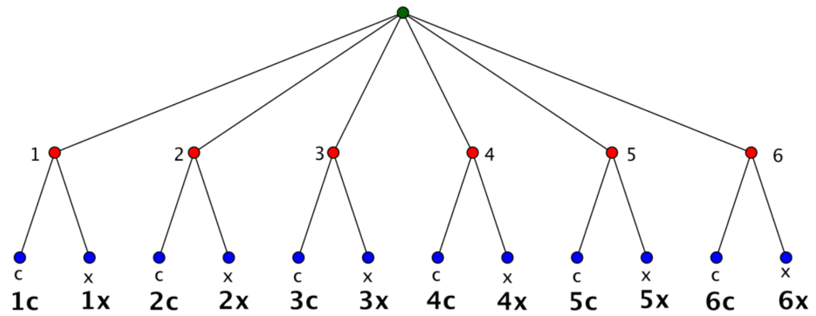
$$\mathrm{P(suma\ 12, dados\ normales)} = \mathrm{P}(6 \text{ y } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \cong 0{,}028$$

$$\mathrm{P(suma\ 12, dados\ trucados)} = \mathrm{P(6\ y\ 6)} = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144} \cong 0{,}174$$

$$\%\ \mathrm{incremento} = \frac{\mathrm{incremento\ probabilidad}}{\mathrm{probabilidad\ inicial}} = \frac{\frac{25}{144} - \frac{1}{36}}{\frac{1}{36}} = \frac{21}{4} = 5{,}25$$

Supone un aumento del 525%.

En la cuarta de las cuestiones nos pide un diagrama de árbol, que sería el siguiente:



Y para finalizar veamos la solución a las cuatro probabilidades que se nos preguntan:

$$P(6 \cap X) = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{48} \cong 0{,}104$$

10,4% probabilidad de 6 y cruz.

$$P(3 \cap C) = \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{32} \cong 0{,}031$$

3,1% probabilidad de 3 y cara.

$$P(2 \cap X) = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{96} \cong 0{,}010$$

1% probabilidad de 2 y cruz.

$$P(\dot{2} \cap C) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{5}{12}\right) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

37,5% probabilidad de par y cara.

Problema 15.

Sean $(\mathrm{a_n})$ y $(\mathrm{b_n})$ dos sucesiones de números reales que cumplen:

$$\mathrm{a_{i+1}} - \mathrm{a_i} = \frac{\mathrm{b_{j+1}}}{\mathrm{b_j}} \quad \forall\, \mathrm{i, j} \in \mathbb{N}$$

a) Si consideramos que $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}$ y $\mathrm{b}_5 = \mathrm{b}$, con a y b dos números cualesquiera, ¿Podemos asegurar que existe algún valor k con $1 < k < 5$ para el que $\mathrm{a}_\mathrm{k} = \mathrm{b}_\mathrm{k}$? ¿Es éste valor único?

b) ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier otro par de valores de la sucesión?, es decir para $\mathrm{a}_\mathrm{p} = \mathrm{a}$ y $\mathrm{b}_\mathrm{q} = \mathrm{b}$, siendo a y b dos números cualesquiera. ¿Se puede establecer alguna relación entre p y q para que exista ese valor k que buscamos cumpliendo $\mathrm{p} < k < q$?

c) Encontrar una solución para $\mathrm{a} = 1\;\; \mathrm{b} = -4;\; \mathrm{p} = 4;\; \mathrm{q} = 7$.

Solución

Apartado a)

Que $a_{i-1} - a_i = \frac{b_{i+1}}{b_i}$, significa que la primera sucesión es una progresión aritmética y otra geométrica, donde diferencia y razón de cada una de las progresiones coincide, sea esa diferencia o razón igual a r.

Los cinco primeros términos de cada sucesión serían:

$a_1 = a$	$b_1 = {}^{b}/_{r^4}$
$a_2 = a + r$	$b_2 = {}^{b}/_{r^3}$
$a_3 = a + 2r$	$b_3 = {}^{b}/_{r^2}$
$a_4 = a + 3r$	$b_4 = {}^{b}/_{r}$
$a_5 = a + 4r$	$b_5 = b$

La primera de las ecuaciones posibles sería, para k=2:

$$a_2 = b_2 \quad \Rightarrow \quad a + r = {}^{b}/_{r^3} \quad \Rightarrow \quad r^4 + ar^3 - b = 0$$

Esta ecuación al ser de grado 4 no podemos asegurar que tenga solución real.

La segunda se obtendría para k=3

$$a_3 = b_3 \quad \Rightarrow \quad a + 2r = {}^{b}/_{r^2} \quad \Rightarrow \quad 2r^3 + ar^2 - b = 0$$

Que en este caso si tiene solución real, al considerarla como función polinómica de grado tres, es continua y cumpliendo:

$$\lim_{r\to-\infty}(2r^3 + ar^2 - b) \;=\; -\lim_{r\to\infty}(2r^3 + ar^2 - b)$$

por lo que siempre podremos encontrar un intervalo de la solución r utilizando el teorema de los ceros de Bolzano.

La tercera se obtendría para k=4

$$a_4 = b_4 \quad \Rightarrow \quad a + 3r = {}^{b}/_{r} \quad \Rightarrow \quad 3r^2 + ar - b = 0$$

En este caso es una ecuación de segundo grado que no podemos asegurar que tenga alguna solución real.

El valor k=3 obtenido asegura que tiene solución, pero eso no implica que para los valores K=2 y k=4, no se obtengan ecuaciones con soluciones válidas, por lo que ese valor k=3 obtenido no es único, aunque sí el único que puede asegurar la solución.

Apartado b)

Cuando se plantean las ecuaciones $a_k = b_k$, hay alternancia de grado, por lo que sería necesario solamente que $q > p + 1$.

Apartado c)

Para los valores $a = 1$; $b = -4; p = 4; q = 7$ tendríamos

$a_4 = 1$	$b_4 = {}^{-4}/_{r^3}$
$a_5 = 1 + r$	$b_5 = {}^{-4}/_{r^2}$
$a_6 = 1 + 2r$	$b_6 = {}^{-4}/_{r}$
$a_7 = 1 + 3r$	$b_7 = -4$

Que nos llevaría a las ecuaciones:

$$1 + r = {}^{-4}/_{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^3 + r^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r+2)\cdot(r^2 - r + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2$$

Y a esta otra ecuación:

$$1 + 2r = {}^{-4}/_{r} \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto las sucesiones serían:

Una P.A. con $a_1 = 1$ y diferencia $d = -2$

Una P.G. con $b_1 = {}^{-1}/_{16}$ y razón $r = -2$.

Problema 16.

Sean x e y números reales que satisfacen la ecuación:

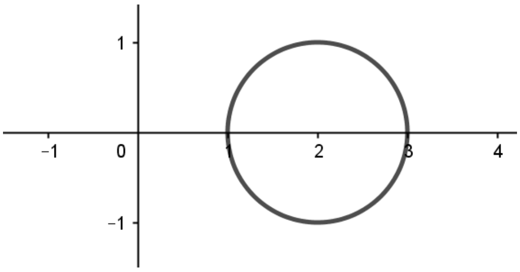
$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

Calcular el máximo y el mínimo de $x^2 + y^2$.

Solución

La ecuación dada se puede escribir completando cuadrados:

$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1$ que es la ecuación de una circunferencia de centro (2,0) y radio 1. El par (x,y) son las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia.



Despejando $x^2 + y^2$ en la ecuación, se obtiene: $x^2 + y^2 = 4x - 3$ cuyo máximo se obtendrá para el mayor valor de la abscisa x y el mínimo para el menor valor.

- El punto de la circunferencia con mayor abscisa es el (3,0). Si x = 3, el máximo M de $x^2 + y^2$ es $4 \cdot 3 - 3 = 9$.
- El punto de la circunferencia con menor abscisa es el (1,0). Si x = 1, el mínimo m de $x^2 + y^2$ $4 \cdot 1 - 3 = 1$.

Así pues los valores máximo y mínimo de la expresión $x^2 + y^2$, son 9 y 1 respectivamente.

Marta disfruta mucho jugando a los dados con su abuela, aunque es un poco traviesa y siempre hace una pequeña trampa. El juego consiste en lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos, ganando la puntuación más alta.