



Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria

Mayo de 2021

Autores

Cecilia Calvo Pesce

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Abraham de la Fuente Pérez

Manuel de León Rodríguez

María José González López

Alfonso Gordaliza Ramos

Iolanda Guevara Casanova

Claudia Lázaro del Pozo

Onofre Monzó del Olmo

Antonio Javier Moreno Verdejo

Luis José Rodríguez Muñiz

Julio Rodríguez Taboada

Ana Serradó Bayés

Comité Español de Matemáticas

Índice

La matematización	3
La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas	5
La competencia matemática	7
Orientaciones metodológicas	9
Desarrollo del razonamiento matemático	10
La resolución de problemas como eje metodológico	11
El pensamiento computacional	11
Sentidos matemáticos	14
Sentido algebraico	14
<i>Patrones</i>	16
<i>Modelo matemático</i>	17
<i>Operadores</i>	18
<i>Variable</i>	19
<i>Igualdad y desigualdad</i>	20
<i>Relaciones y funciones</i>	21
Sentido espacial	25
<i>Figuras geométricas de dos y tres dimensiones</i>	27
<i>Localización y sistemas de representación</i>	28
<i>Movimientos y transformaciones</i>	29
<i>Visualización, razonamiento y modelización geométrica</i>	30
Sentido estocástico	35
<i>Distribución</i>	37
<i>Inferencia</i>	40
<i>Predictibilidad e Incertidumbre</i>	43
Sentido de la medida	50
<i>Magnitud</i>	51
<i>Medición</i>	52
<i>Estimación y relaciones</i>	54
<i>Cambio</i>	54
Sentido numérico	58
<i>Conteo</i>	60
<i>Cantidad</i>	61
<i>Sentido de las operaciones</i>	62
<i>Relaciones</i>	63
<i>Razonamiento proporcional</i>	64
Referencias	68

La matematización

Recogiendo las ideas de Freudenthal (1973, 1983 y 1991), De Lange (1987) y el marco teórico del estudio PISA (OCDE), las matemáticas, como actividad humana, son indispensables para la sociedad y por tanto deben alcanzar a toda la ciudadanía. La realidad debe ser utilizada como fuente para la matematización, entendida como la traducción de los problemas del mundo real al matemático, así como la utilización de conceptos y destrezas matemáticas en el día a día de cada persona, en un doble proceso horizontal y vertical.

Los procesos de matematización, por lo tanto, suponen como se recoge en Rico, L. (2007):

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera.
- Reconocer isomorfismos o analogías con otros problemas ya conocidos.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez realizados estos primeros pasos, que corresponden a la matematización horizontal, prosigue, a partir de la matemática construida, el proceso en vertical, en el cual es posible:

- Utilizar diferentes representaciones y modelos.
- Usar los lenguajes simbólico, formal y técnico, y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar, inducir y generalizar.

Las matemáticas son instrumentales para la mayoría de las áreas de conocimiento, entre las que se encuentran las ciencias naturales, la ingeniería y la arquitectura, las ciencias de la salud y las ciencias sociales. Incluso para disciplinas que, aparentemente, no están vinculadas con ellas, como la música, las artes o las humanidades, también se reconoce cada vez más su carácter instrumental. Sin embargo, las matemáticas tienen, además, un valor propio, independiente de su papel en relación con el resto de áreas. Si consideramos el lenguaje como uno de los grandes logros de la humanidad, las

matemáticas participan de ese reconocimiento como lenguaje, al que se añade su característica de universalidad. No hay que olvidar tampoco el papel que las matemáticas desempeñaron en la invención de la escritura. Por todo lo anterior, aunque las actividades, situaciones, problemas, etc., estén en un contexto lo más real posible, la elección de estos contextos debe permitir que surjan ideas matemáticas. En este planteamiento, lo importante no es solo que el contexto contenga ideas de otros ámbitos científicos, sino que sea rico desde el punto de vista matemático.

Otro de los aspectos fundamentales de las matemáticas en este momento es su uso en la llamada ciencia o inteligencia de datos. Posiblemente el paradigma del siglo XXI, en un escenario en el que la ciudadanía, además de ser bombardeada continuamente por medios de comunicación y redes sociales con multitud de datos e informes con referencias cuantitativas, expone sus propios datos en las redes sociales con un gran desconocimiento de cómo estos pueden ser utilizados para explotaciones comerciales o con fines espurios. Este escenario es completamente nuevo y un currículo matemático debe contener conocimientos e instrumentos para afrontarlo.

El desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde los contextos y los modelos poseen un papel relevante. Este desarrollo se lleva a cabo mediante un proceso didáctico denominado reinención guiada, en un ambiente de heterogeneidad cognitiva. Desde el punto de vista curricular, la reinención guiada de la matemática como actividad de matematización requiere de la investigación de contextos y situaciones que generan la necesidad de ser organizados matemáticamente, siendo las fuentes principales no solo la historia y evolución de la matemática sino también las investigaciones en educación matemática, especialmente las realizadas en relación con las trayectorias de aprendizaje. No se empieza por el conocimiento ya adquirido, sino que se muestra al alumnado cómo se ha ido adquiriendo.

Un currículo es mucho más que una colección de actividades: debe ser coherente y estar centrado en temas matemáticos importantes y bien articulados en los diferentes etapas escolares. A este respecto, conviene no perder de vista que el currículo español ya incluye un bloque transversal dedicado a procesos, métodos y actitudes en matemáticas, que suele verse mermado a causa de la preponderancia de los bloques de contenidos clásicos (geometría, álgebra, cálculo, estadística). Sin embargo, ese bloque incide en aspectos que surgen de la tradición de la enseñanza y el aprendizaje de los procesos matemáticos subyacentes y que señalan que en matemáticas no sólo es importante abordar un contenido, sino que existen formas de razonamiento y

habilidades que son comunes a todos ellos y que determinan la forma en que las matemáticas se hacen y se aprenden.

La concepción global del currículo, más allá de los contenidos, nos permite también mirar las matemáticas desde un punto de vista superior. En este sentido, es muy importante señalar la existencia de las denominadas grandes ideas matemáticas (patrones, modelo, variable, relaciones y funciones, movimientos y transformaciones, distribución, incertidumbre, magnitud, etc.), que vertebran estos contenidos en niveles superiores y permiten apreciar la continuidad y las conexiones intra matemáticas, y que suelen corresponderse con hitos revolucionarios en la disciplina. A este respecto, es importante señalar la gran revolución que han experimentado las matemáticas en los últimos cincuenta años, con la irrupción de los ordenadores, lo que ha permitido abordar muchos problemas que hasta entonces no había sido posible; así, el currículo debe contemplar el uso de la computación.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

La enseñanza efectiva de las matemáticas requiere entender qué sabe el alumnado y qué necesita aprender y, a partir de esta información, provocarlo, estimularlo y acompañarlo para que realice un buen aprendizaje. El alumnado debe aprender matemáticas entendiéndolas, debe construir nuevo conocimiento activamente, a partir de sus experiencias y de sus conocimientos anteriores. Estableciendo unas conexiones que incorporan este conocimiento en su red personal de conocimientos o saberes.

La excelencia en la educación matemática requiere equidad, expectativas altas y un fuerte apoyo para todo el alumnado. En la equidad educativa se pueden identificar dos dimensiones: la imparcialidad y la inclusión. Es decir, asegurar que las circunstancias personales y sociales no constituyan un obstáculo para conseguir el máximo potencial educativo y, garantizar un estándar mínimo para todo el alumnado.

La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que influye en cómo se enseñan, en cómo se pueden enseñar y, además, contribuye a mejorar el proceso de aprendizaje. Por otra parte, los retos tecnológicos pasan

necesariamente por conectar la matemática escolar con la programación, como experiencia relacionada simbióticamente con la resolución de problemas matemáticos.

La evaluación debe reafirmar el aprendizaje de conceptos matemáticos importantes y, además, suministrar información útil tanto a los docentes como a los estudiantes.

Así, en la educación no universitaria, de acuerdo con la propuesta de Van der Heuvel y Drijvers (2020) reformulando ideas de Treffers (1987), la enseñanza de las matemáticas debe guiarse por los siguientes Principios:

- *El principio de actividad* significa que el alumnado es tratado como participante activo en el proceso de aprendizaje (la enseñanza basada en el alumnado, un nuevo paradigma europeo). También enfatiza que las matemáticas se aprenden mejor haciendo matemáticas, lo que se refleja fuertemente en la interpretación de las matemáticas como una actividad humana.
- *El principio de realidad* se puede reconocer de dos formas. En primer lugar, expresa la importancia que se concede al objetivo de la educación matemática, incluida la capacidad del alumnado para aplicar las matemáticas en la resolución de problemas de la "vida real". En segundo lugar, significa que la educación matemática debe partir de situaciones problemáticas que sean significativas para el alumnado, lo que le ofrece oportunidades para dar significado a los constructos matemáticos que desarrollan mientras resuelven problemas. En lugar de comenzar con la enseñanza de abstracciones o definiciones que se aplicarán más tarde, la enseñanza debe comenzar con problemas en contextos ricos que requieren organización matemática o, en otras palabras, se pueden matematizar y poner a los estudiantes en la pista de estrategias de solución informales relacionadas con el contexto como un primer paso en el proceso de aprendizaje.
- *El principio de nivel* subraya que aprender matemáticas significa que los estudiantes pasan varios niveles de comprensión: desde soluciones informales relacionadas con el contexto, a través de la creación de varios niveles de atajos y esquematizaciones, hasta adquirir conocimientos sobre cómo se relacionan conceptos y estrategias. Los modelos son importantes para cerrar la brecha entre las matemáticas informales relacionadas con el contexto y las matemáticas más formales. Para cumplir con esta función de puente, los modelos tienen que cambiar de un "modelo de" una situación particular a un "modelo para" otras situaciones de todo tipo, diferentes pero equivalentes.
- *El principio de entrelazamiento* significa que los dominios de contenido matemático como el número, la geometría, la medición y el manejo de datos no se consideran capítulos del plan de estudios aislados, sino que están muy integrados. Al alumnado se

le ofrece problemas ricos en los que puede utilizar diversas herramientas y conocimientos matemáticos. Este principio también se aplica dentro de los dominios. Por ejemplo, dentro del dominio del sentido numérico, la aritmética mental, la estimación y los algoritmos se enseñan en estrecha conexión entre sí.

- *El principio de interactividad* significa que el aprendizaje de las matemáticas no es solo una actividad individual sino también social. Por lo tanto, favorece las discusiones de toda la clase y el trabajo en grupo que ofrecen a los estudiantes oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones con otros. De esta manera, el alumnado puede obtener ideas para mejorar sus estrategias. Además, la interacción evoca la reflexión, lo que permite al alumnado alcanzar un mayor nivel de comprensión.
- *El principio de orientación* se refiere a la idea de reinención guiada de las matemáticas. Este principio implica que el profesorado debe tener un papel proactivo en el aprendizaje del alumnado y que los programas educativos deben contener escenarios con el potencial de funcionar como una palanca para lograr cambios en la comprensión del alumnado. Para conseguir esto, la enseñanza y los programas deben basarse en trayectorias coherentes de enseñanza-aprendizaje a largo plazo.

Todos estos principios deben aplicarse durante los procesos de enseñanza y aprendizaje con el objetivo de lograr que el alumnado sea competente matemáticamente.

La competencia matemática

Como Niss (2003a y b), consideramos la competencia matemática como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos matemáticos y no matemáticos. Esto supone:

Pensar *matemáticamente*, que implica poder aplicar en nuestra vida diaria el pensamiento cuantitativo y lógico, es decir, conocer las preguntas propias de las matemáticas y conocer los tipos de respuesta que las matemáticas pueden ofrecer.

El planteamiento y la resolución de problemas implican identificar, plantear y especificar diferentes tipos de problemas matemáticos. Por otra parte, proponer problemas más cercanos a la vida real facilita el desarrollo de la competencia matemática, ya que, en definitiva, resolver problemas es una actividad presente en nuestra vida diaria.

Saber construir modelos matemáticamente es una competencia matemática que se refiere a la capacidad de ir del mundo real al modelo y del modelo al mundo real, obteniendo e interpretando los resultados. Esto conlleva el análisis de los modelos ya existentes y realizar actividades de modelización en un contexto determinado.

Razonar matemáticamente va unido a la necesidad de construir adecuadamente los conceptos, siendo conscientes de que las demostraciones no sólo son propias de las matemáticas, sino que son propias de muchos aspectos de la vida. Se trata de ser riguroso en los argumentos y no admitir informaciones o declaraciones que no estén avaladas por las correspondientes demostraciones, además de descubrir las ideas básicas en una línea argumental y concebir formal e informalmente argumentos matemáticos y transformar argumentos heurísticos en demostraciones válidas. Los estudiantes usarán esta capacidad en otras materias diferentes de las matemáticas, ya que el método científico descansa en ella.

La representación de entidades matemáticas implica la capacidad de comprender y utilizar diferentes clases de representación de objetos matemáticos, como la comprensión de tablas, gráficas, mapas de situaciones o incluso, a modo de ejemplo, un horario de trenes.

El manejo de símbolos matemáticos y formalismos forma parte del lenguaje actual, no únicamente matemático, sino a todos los niveles, como el utilizado, por ejemplo, en los teléfonos móviles. Sin embargo, el uso adecuado de la simbología no debe suponer dificultades para la resolución de un determinado problema. De ello se deriva la capacidad de traducir el lenguaje natural al lenguaje formal y simbólico y de poder manipular expresiones que contengan símbolos y fórmulas.

Comunicación en, con y acerca de las matemáticas se asocia a la capacidad de comprender mensajes orales, escritos o visuales que posean contenido matemático y expresar las cuestiones planteadas oralmente, visualmente o por escrito, con diferentes niveles de precisión teórica y técnica. Esta capacidad está estrechamente relacionada con la adquisición de un nivel suficiente de competencia comunicativa, ya que disponer de una buena capacidad de comunicar en temas cuantitativos formaría parte de la alfabetización matemática.

El uso de recursos y herramientas implica el correcto uso de materiales, aplicaciones informáticas y aparatos tecnológicos útiles para la actividad matemática.

Es también relevante que el alumno que termine su ciclo académico interiorice que las matemáticas son una parte crucial del acervo cultural de la humanidad, más allá de su concepción instrumental.

Por otro lado, es importante que se conciba la competencia matemática en relación con otras competencias fundamentales, especialmente en el ámbito de la educación obligatoria. Así, es preciso establecer vínculos con la competencia lingüística, como elemento instrumental en la comprensión del mundo que nos rodea y, particularmente, como vehículo para organizar el pensamiento matemático. Por otro lado, la competencia matemática es base para el desarrollo de otros paradigmas como la competencia estadística (que incrementa el papel del contexto y de su interpretación), la competencia digital (entendida como un tercer pilar comunicativo junto con el lenguaje natural y el lenguaje matemático) y el más reciente de la denominada alfabetización en datos (que supone la obtención de información significativa y razonada a partir de conjuntos de datos).

Orientaciones metodológicas

Con el cambio del currículo de matemáticas que se llevará a cabo con motivo de la implantación de la LOMLOE, la sociedad española tiene la oportunidad de llevar a cabo un proceso de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con el fin de contribuir a este debate ejerciendo un liderazgo de la comunidad educativa de matemáticas, se constituyó un Grupo de Trabajo del Comité Español de Matemáticas (CEMat). Este grupo ha elaborado unos principios fundamentales para el diseño y desarrollo del currículo de la educación matemática en todos los niveles. Esta propuesta se desarrolla como una forma de colaborar en los procesos de planificación existentes en el Ministerio de Educación y Formación Profesional, y no de suplantarlos.

Este documento tiene la doble pretensión tanto de iniciar el debate como de orientar, en un desarrollo posterior, la planificación, ayudando de este modo al profesorado de todos los niveles a identificar las estrategias y actividades precisas que mejorarán la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

El trabajo colaborativo del profesorado de matemáticas desde la Educación Infantil hasta el Bachillerato, junto con las aportaciones de la investigación en educación matemática, necesariamente resultará en un mejor aprendizaje y en mejores resultados de los estudiantes.

El currículo tiene que responder a las preguntas: ¿Qué es y en qué consiste el conocimiento matemático? ¿Para qué sirve su aprendizaje? ¿Cuándo y cómo se lleva a cabo su enseñanza? ¿Qué resultados muestran el logro de los aprendizajes? Gran

parte de las propuestas curriculares actuales tienen como concepto de inicio para su diseño, desarrollo e implementación en el aula, la alfabetización matemática.

La alfabetización matemática es una idea dinámica cuyo desarrollo implica una mejora continua. La definición que adoptaremos de alfabetización matemática es la presentada en el marco teórico de PISA 2021 (p. 11):

La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI.

Esta definición supone que, al terminar los estudios de la etapa obligatoria, los estudiantes deberán ser capaces de usar su conocimiento de los contenidos matemáticos para reconocer la naturaleza matemática de una situación (problema), especialmente de aquellas situaciones que se encuentran en la vida real, y luego formularla en términos matemáticos. El proceso de matematización de un problema implica transformar una situación confusa y ambigua de la vida real en un problema matemático bien definido. Esto exige un razonamiento matemático. El problema matemático resultante necesita resolverse usando los procedimientos, algoritmos y conceptos matemáticos aprendidos, pero será necesario tomar decisiones estratégicas sobre la selección de estas herramientas y el orden de su aplicación, para lo cual también se recurre al razonamiento matemático. El proceso de matematización termina con la necesidad del estudiante de evaluar la solución matemática interpretando los resultados en la situación original de la vida real.

Por todo lo anterior, entendemos que la alfabetización matemática no significa únicamente la capacidad de resolver problemas en contextos más o menos reales, sino que combina lo que entendemos como los grandes principios metodológicos (razonamiento, resolución de problemas y pensamiento computacional) para el desarrollo e implementación del currículo futuro.

Desarrollo del razonamiento matemático

Como hemos visto en la descripción anterior del ciclo de matematización, el razonamiento matemático (tanto deductivo como inductivo) involucra sopesar

situaciones, elegir estrategias, sacar conclusiones lógicas, desarrollar y describir soluciones y reconocer cómo esas soluciones pueden ser aplicadas (PISA, 2021). Los estudiantes desarrollan el razonamiento matemático cuando en clase: identifican, reconocen, organizan, conectan, representan, construyen, abstraen, evalúan, deducen, justifican, explican, defienden, interpretan, hacen juicios, critican, refutan y cualifican. Dedicar más tiempo al desarrollo de estas capacidades y menos a la repetición de algoritmos es un cambio importante que debe contemplarse en la reforma curricular.

La resolución de problemas como eje metodológico

Resolver un problema significa comprometerse con la solución de una tarea para la que no se conoce previamente el método de solución. Al abordar los problemas, los estudiantes tienen que razonar matemáticamente, emplear sus conocimientos matemáticos y en ocasiones, adquirir nociones matemáticas nuevas (NCTM, 2003). Los nuevos currículos tienen que favorecer la resolución de problemas no solo como objetivo del aprendizaje de las matemáticas sino como metodología fundamental para el aprendizaje de las matemáticas.

El pensamiento computacional

La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La selección adecuada de los recursos tecnológicos para el trabajo en el aula de matemáticas permite al alumnado aprender y profundizar en el conocimiento matemático. La versatilidad y potencia de la tecnología obligan a repensar cuáles son las matemáticas que, fundamentalmente, debería aprender el alumnado (NCTM, 2003). Sin embargo, cuando hablamos de pensamiento computacional queremos resaltar una idea que va más allá del uso de herramientas tecnológicas para la resolución de una tarea. Hablamos de que el alumnado debe aprender habilidades de pensamiento computacional. Estas habilidades incluyen el reconocimiento de patrones, el diseño y uso de abstracciones, la descomposición de patrones, la determinación de qué herramientas son adecuadas para analizar o solucionar un problema y definir algoritmos como parte de una solución. Su potencialidad está en ver el pensamiento computacional como un proceso de pensamiento que supone formular problemas y diseñar sus soluciones de manera que puedan ser ejecutadas por un ordenador, un humano o una combinación de ambos (PISA, 2021).

Centrar el trabajo en estos tres grandes principios metodológicos implicaría (Ontario Ministry of Education, 2005b):

- Tener como base de la educación matemática el currículo, tanto para el contenido como para las estrategias de enseñanza. Para ello, se requiere un desarrollo posterior con documentos que permitan al profesorado comprender la propuesta educativa del currículo, subrayando sus diferencias de contenido y metodológicas respecto a propuestas previas, y proporcionando estrategias y materiales para su implementación.
- Centrarse en conceptos clave del currículo de matemáticas. Planificar, secuenciar y conectar estos conceptos matemáticos clave en todos los niveles educativos, evitando saltos y desconexiones entre etapas educativas.
- Favorecer que el alumnado aplique sus conocimientos matemáticos y amplíe su comprensión a partir del trabajo realizado. Al mismo tiempo, facilitar que desarrolle una comprensión profunda de los conceptos, habilidades y procesos matemáticos.
- Facilitar el aprendizaje integrado en el aula, el acceso en línea y remoto, y oportunidades de aprendizaje digital que aprovechan el uso de la tecnología.
- Realizar tareas matemáticas complejas que sean significativas para el alumnado y hacer que participe en el aprendizaje de matemáticas relevantes y rigurosas, percibiendo así la importancia y la utilidad de las matemáticas.
- Proporcionar una variedad de materiales para ayudar al alumnado a representar situaciones problemáticas con una variedad de representaciones y herramientas.
- Desarrollar tareas auténticas basadas en conceptos clave en matemáticas y que permitan establecer conexiones interdisciplinarias.
- Desarrollar una comunidad de aprendizaje de matemáticas con oportunidades para el diálogo y la interacción entre el alumnado y profesorado-alumnado.
- Proporcionar evaluación en matemáticas que sea justa, transparente y equitativa, acorde con las capacidades desarrolladas por el alumnado y no solo de contenidos.
- Utilizar la gama de habilidades de pensamiento de nivel superior en procesos matemáticos: resolver problemas, razonar y argumentar, comunicar, representar, modelizar, seleccionar herramientas y estrategias computacionales y usar el lenguaje simbólico.
- Fomentar múltiples enfoques para aprender y hacer matemáticas de forma activa.
- Planificar tareas y oportunidades de aprendizaje a través de la atención a la diversidad entendida en sentido amplio.

La propuesta que se presenta no pretende ser un desarrollo exhaustivo de los contenidos específicos que se desarrollarían en el currículo de matemáticas de la

educación Infantil, Primaria y Secundaria, sino un conjunto de ideas (grandes ideas) matemáticas clave para la alfabetización matemática del alumnado al terminar la etapa de educación obligatoria. Estas ideas (grandes ideas) matemáticas clave están organizadas en torno a la idea de sentido matemático.

Entendemos el sentido matemático como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades (Ruiz-Hidalgo et al., 2019). El origen de esta consideración arranca de apreciar que las matemáticas son una ciencia cultural, que permite pensar, entender y actuar en los problemas del entorno que tienen que ver con la cantidad, la forma, el tamaño y la incertidumbre aleatoria. Esta idea permite dar coherencia y continuidad al paso de Primaria a Secundaria al tiempo que plantea una enseñanza funcional de las matemáticas, que haga predominar y dar sentido a los conceptos en resolución de problemas o tareas en contexto, frente al aprendizaje de destrezas o algoritmos en situaciones descontextualizadas (Rico y Díez, 2011).

Sentidos matemáticos

Como ya hemos dicho, estructuramos nuestra propuesta en cinco sentidos matemáticos:

- Sentido algebraico
- Sentido espacial
- Sentido estocástico
- Sentido de la medida
- Sentido numérico

El orden de aparición en el documento no supone ninguna indicación de prioridad cronológica ni de importancia en el aprendizaje de las matemáticas. Por este motivo hemos elegido su orden alfabético. Esta concreción corresponderá a cada centro una vez analizada su realidad educativa.

Sentido algebraico

El álgebra se considera a menudo como una puerta de entrada a las matemáticas superiores, sobre todo porque proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. En consecuencia, es importante que todo el alumnado tenga la oportunidad de aprender álgebra de manera significativa.

La descripción de lo que se considera pensamiento algebraico es compleja, pues lo que se entiende por álgebra depende de muchos factores que varían ampliamente incluso dentro de la comunidad educativa. Sin embargo, pensamos que hay dos características principales que lo definen: ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas. En ambos casos es de vital relevancia la capacidad de manipular las representaciones simbólicas involucradas produciendo otras representaciones equivalentes que podrían ser más útiles en un determinado contexto.

El estudio del álgebra requiere un cambio en el pensamiento del alumnado, de las situaciones numéricas más concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes, constituyendo así una herramienta matemática que permite comprender, estudiar y modelar diferentes sucesos que se presentan en el mundo.

Hay varias perspectivas desde las que se puede plantear los diferentes abordajes del álgebra escolar. Los últimos estudios del ICMI (Stacey (2006)) sobre la enseñanza del álgebra se centran en cuatro enfoques destinados a hacer que el aprendizaje de álgebra sea significativo para el alumnado, enfoques que se podría decir que abarcan algunos de los componentes básicos del álgebra escolar:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas
- Resolución de problemas
- Situaciones funcionales
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

La enseñanza del álgebra está cambiando gracias al avance de la tecnología, que proporciona nuevos métodos de resolución de problemas matemáticos, de modo que las habilidades que han sido imprescindibles en décadas anteriores pueden no serlo ahora. Tecnologías como las hojas de cálculo, las calculadoras gráficas o las aplicaciones de geometría dinámica proporcionan métodos más accesibles para la resolución de problemas, y en un nivel más avanzado, las aplicaciones de álgebra simbólica pueden realizar manipulaciones simbólicas complejas de forma rápida y fiable. Los currículos de álgebra deben responder a estos cambios.

Gran idea sobre sentido algebraico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Patrones						
Modelo matemático						
Operadores						
Variable						
Igualdad y desigualdad						
Relaciones y funciones						

En Educación Infantil todo el alumnado debería	En Educación Primaria todo el alumnado debería:	En ESO todo el alumnado debería:	En Bachillerato todo el alumnado debería:
--	---	----------------------------------	---

Patrones

<ul style="list-style-type: none"> ● Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos. ● Reconocer, describir y extender patrones, principalmente, de repetición. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Identificar las características variantes e invariantes en una colección de objetos. ● Describir regularidades (entre ellas, las propiedades de las operaciones aritméticas) de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas. ● Crear patrones. ● Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión (patrones de repetición, de crecimiento ...): el elemento siguiente, uno lejano, uno genérico ... 	<ul style="list-style-type: none"> ● Representar, analizar, y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, con reglas simbólicas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Generalizar patrones que surgen en situaciones diversas, usando funciones definidas explícita y recurrentemente.
--	--	--	--

Modelo matemático

<ul style="list-style-type: none"> ● Organizar las matemáticas informales que emergen de situaciones de la vida cotidiana, de la manipulación de materiales y del juego. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelar situaciones de problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Modelar y resolver problemas contextualizados usando varias representaciones, como gráficas, tablas y ecuaciones. Prestando especial atención a modelos: lineales, cuadráticos, de proporcionalidad inversa y exponenciales. ● Juzgar el significado, utilidad y racionalidad de los resultados de las manipulaciones de símbolos, incluidos los obtenidos con recursos tecnológicos. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Identificar las relaciones cuantitativas esenciales en una situación y determinar la clase o clases de funciones que puede modelar las relaciones. ● Usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar las relaciones derivadas de diferentes contextos. ● Sacar conclusiones razonables acerca de una situación que está siendo modelada. ● Usar sistemas de ecuaciones para modelar situaciones de la realidad y geométricas, tanto en el plano como en el espacio. ● Usar matrices para, al menos, modelar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones
---	--	--	--

			<p>lineales o grafos.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Usar sistemas de inecuaciones para modelar situaciones que den lugar a problemas de programación lineal. ● Juzgar el significado, utilidad y racionalidad de los resultados de las manipulaciones de símbolos, incluidos los obtenidos con recursos tecnológicos.
--	--	--	--

Operadores

			<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar la comprensión de las propiedades y las representaciones de la adición y multiplicación de vectores y de matrices, ligándola a fenómenos de la realidad. ● Desarrollar destreza para operar con vectores y
--	--	--	---

			<p>matrices, utilizando el cálculo mental o de lápiz en los casos sencillos, y la tecnología en los más complicados.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Entender los vectores y las matrices como sistemas que poseen propiedades algebraicas.
--	--	--	---

Variable

	<ul style="list-style-type: none"> ● Representar la idea de variable como cantidad desconocida, o que toma diferentes valores por medio de una letra o un símbolo. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar una comprensión conceptual inicial de los diferentes usos de variables. ● Usar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en relaciones lineales y cuadráticas. ● Comprender el significado del lenguaje algebraico como un avance en la historia y el desarrollo de las 	<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar una comprensión conceptual completa de los diferentes usos de variables. ● Valorar las diferentes etapas de la historia del álgebra, la formalización del lenguaje simbólico y el avance que supuso para el desarrollo de otras ciencias, en particular de la física.
--	---	---	--

		matemáticas frente al lenguaje retórico sin símbolos matemáticos de la antigüedad.	
--	--	--	--

Igualdad y desigualdad

	<ul style="list-style-type: none"> • Expresar relaciones matemáticas mediante igualdades y desigualdades. 	<ul style="list-style-type: none"> • Usar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente, aquellos que involucran relaciones lineales y cuadráticas. • Reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. • Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones, para las funciones y las relaciones. • Comprender el significado de formas equivalentes de 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrollar destreza para aplicar reglas de aritmética y álgebra junto con las nociones de equivalencia para transformar ecuaciones e inecuaciones de modo que se puedan encontrar soluciones y relacionarlas con los ceros de las funciones. • Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para las funciones y las relaciones. • Comprender el significado de formas equivalentes de
--	--	--	---

		<p>expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y de inecuaciones y resolver con fluidez mediante cálculo mental o con lápiz y papel en los casos simples y con el uso de la tecnología en todos los casos. 	<p>expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones y de inecuaciones y resolver con fluidez mediante cálculo mental o con lápiz y papel en los casos simples y con el uso de la tecnología en todos los casos.
--	--	---	---

Relaciones y funciones

	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer y describir una relación entre los estados inicial y final cuando hay algún cambio involucrado. ● Entender la igualdad y el uso del signo = como una relación de equivalencia entre los elementos que se encuentran a derecha e izquierda y ser capaz de determinar algún dato desconocido en cualquiera 	<ul style="list-style-type: none"> ● Relacionar y comparar las diferentes formas de representación de una relación. ● Identificar funciones, lineales o no lineales y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o expresiones algebraicas. ● Explorar las relaciones entre expresiones simbólicas y gráficas de líneas, prestando 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender las relaciones y funciones, representarlas de diferentes formas, seleccionar la más adecuada y pasar con flexibilidad de una a otra. ● Comprender y realizar transformaciones con funciones, como combinarlas aritméticamente, componer las de uso común, y obtener
--	---	--	---

	<p>de las dos partes.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Entender la relación “mayor que” y “menor que” y el uso de los signos $<$ y $>$ (entre otros) y ser capaz de determinar algún dato desconocido entre las partes que estos signos relacionan. 	<p>especial atención al significado de la ordenada en el origen y de la pendiente.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas. ● Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones, para las funciones y las relaciones. ● Comprender el uso de coordenadas como un avance en la historia y el desarrollo de las matemáticas, en particular para la representación gráfica de relaciones. 	<p>sus inversas. Utilizando la tecnología para realizar las operaciones con las expresiones simbólicas más complicadas.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Comprender y comparar las propiedades de las clases de funciones, incluyendo, polinómica, exponencial, racional, logarítmica y periódica. ● Interpretar las representaciones de las funciones de dos variables. ● Usar el álgebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas. ● Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para las funciones y las relaciones.
--	--	---	--

En las distintas etapas se debería que prestar más atención a:

Infantil y Primaria

- Explicitar los criterios a partir de los cuales se hacen clasificaciones, ordenaciones y seriaciones.
- Identificar y construir patrones numéricos y geométricos;
- Describir patrones verbalmente y representarlos mediante tablas o símbolos;
- Buscar y aplicar relaciones entre cantidades que varían, para hacer predicciones;
- Hacer y explicar generalizaciones basadas en situaciones particulares;
- Utilizar gráficas para describir patrones y hacer predicciones;
- Explorar propiedades de los números;
- Usar notaciones inventadas, símbolos estándar y variables, para expresar un patrón, una generalización o una situación

Secundaria Obligatoria

- Identificar y usar relaciones funcionales, no únicamente lineales y cuadráticas, sino también relaciones de proporcionalidad inversa, exponencial, logarítmica, etc.
- Desarrollar y usar tablas, gráficas y reglas para describir situaciones.
- Realizar una interpretación entre diferentes representaciones matemáticas.
- Desarrollar estructuras conceptuales para variables, incógnitas, expresiones y ecuaciones y analizar su relación algebraica.
- Utilizar toda una gama de métodos para resolver ecuaciones lineales e investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales.

Bachillerato

- Utilizar problemas del mundo real para motivar y aplicar la teoría.
- Usar utilidades informáticas para desarrollar estructuras conceptuales.
- Los métodos basados en la informática tales como aproximaciones sucesivas y utilidades gráficas, para resolver ecuaciones e inecuaciones.
- Las matrices y sus aplicaciones (Grafos, movimientos en el plano y en el espacio, cadenas de Markov, modelo SIR, números complejos...).
- Integrar las grandes ideas entre sí y a través de los distintos niveles.
- Establecer conexiones entre una situación de problema, su modelo como función en forma simbólica y la representación gráfica de dicha función.

- Utilizar la ecuación de una función expresada de forma analítica como comprobación de la razonabilidad de las representaciones generadas por las utilidades gráficas.
- Utilizar las funciones construidas para modelizar problemas del mundo real.

Merecen menos atención:

Secundaria Obligatoria

- Manipular expresiones algebraicas de complejidad mayor que la que aparece naturalmente en el contexto de las situaciones problemáticas (contextualizadas o no) que se planteen en esta etapa.
- Memorizar procedimientos y hacer práctica de repetición sobre resolución de ecuaciones.

Bachillerato

- Clasificar enunciados por tipos, como los de monedas, dígitos y trabajo.
- Usar factores para resolver ecuaciones y para simplificar expresiones racionales.
- Calcular operaciones con expresiones racionales.
- Representar gráficas de ecuaciones con papel y lápiz por medio de una trama de puntos.
- Calcular logaritmos usando tablas e interpolación.
- Usar y operar con matrices sin contextualizar.
- Calcular el determinante y la inversa de una matriz con lápiz y papel.
- Resolver sistemas de ecuaciones usando determinantes.
- Obtener valores numéricos con lápiz y papel.
- Representar gráficamente funciones a mano usando tablas de valores.
- Utilizar fórmulas dadas como modelos de problemas del mundo real, sin analizar de dónde surge el modelo.
- Expresar ecuaciones de una función de forma analítica, con el exclusivo objeto de representarlas gráficamente.
- Dar al sentido algebraico un tratamiento independiente del resto de sentidos matemáticos.

Sentido espacial

El sentido espacial es necesario para comprender y apreciar los aspectos geométricos de nuestro mundo. Este sentido se puede caracterizar por la competencia del sujeto para registrar y representar formas y figuras, reconocer sus propiedades, identificar relaciones entre ellas, ubicarlas y describir sus movimientos. Como principales referencias para desarrollar este sentido se han tomado los Principios y Estándares para la Educación Matemática del NCTM y el Marco teórico de PISA para la evaluación de la competencia matemática 2021, según las cuales el sentido espacial se refiere a las capacidades de un individuo para trabajar e interactuar en un entorno amplio, elaborar o descubrir imágenes de formas y figuras, clasificarlas, relacionarlas y razonar con ellas.

Todo el alumnado debe desarrollar el sentido espacial, siendo un objetivo básico de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a través de actividades espaciales integradas en los planes de estudio, de oportunidades para el uso de vocabulario espacial en el lenguaje, del fomento de habilidades espaciales, de ejemplos concretos enlazados a experiencias previas, del seguimiento de dificultades y errores del alumnado y del establecimiento de la tecnología.

Su desarrollo se muestra cuando el alumnado es capaz de identificar, analizar y describir las características y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones, con criterios comunes y propios, en la localización y descripción de posiciones y trayectorias, en la descripción de invariantes y relaciones entre cuerpos y figuras; y en la aplicación e identificación de transformaciones, composiciones y descomposiciones geométricas.

El sentido espacial debe ir acompañado del sentido de la medida y el descubrimiento de patrones, pero además en la educación secundaria también se puede relacionar con el concepto de función, así, por ejemplo, las formas pueden cambiar y un punto puede moverse a lo largo de un lugar geométrico, lo que requiere conceptos de función. Los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta son centrales en esta área, siendo más importantes los primeros en la educación primaria y los segundos para la secundaria, sin caer en el error de desarrollar una larga lista de fórmulas para calcular áreas o perímetros.

Gran idea sobre sentido espacial	Infantil	Primaria	ESO	Bachillerato
Figuras geométricas de dos y tres dimensiones				
Localización y Sistemas de representación				
Movimientos y Transformaciones				
Visualización, razonamiento y modelización geométrica				

En todas las etapas el alumnado debería desarrollar el sentido espacial mediante manipulación, observación y razonamiento (empleando medios tecnológicos, si fuera preciso).

En Educación Infantil todo el alumnado debería	En Educación Primaria todo el alumnado debería:	En ESO todo el alumnado debería:	En Bachillerato todo el alumnado debería:
--	---	----------------------------------	---

Figuras geométricas de dos y tres dimensiones

<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer las propiedades geométricas elementales de las formas: de una dimensión, de dos dimensiones y de tres dimensiones. ● Clasificar las líneas (rectas y curvas). ● Clasificar las figuras geométricas a partir de criterios elementales. ● Clasificar los cuerpos geométricos. ● Asociar formas. ● Seriar formas. ● Cambiar formas a través de deformaciones, y por composición y descomposición de formas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Identificar propiedades de las formas en 2D y en 3D primero partiendo de objetos del mundo real y después a través de construcciones geométricas dadas o que deba construir el propio alumnado, ya sea con materiales manipulativos o con materiales virtuales. ● Comparar propiedades de las formas a través de la observación y también de la composición o descomposición de las mismas. ● Ordenar y clasificar formas atendiendo a sus 	<ul style="list-style-type: none"> ● Describir con precisión, clasificar y comprender las relaciones entre tipos de objetos de dos o tres dimensiones usando las propiedades que los definen. Comprender las relaciones entre los ángulos, las longitudes de los lados, los perímetros, las áreas y los volúmenes de objetos semejantes. ● Crear y criticar argumentos concernientes a conceptos y relaciones geométricos, como la congruencia, la semejanza y la relación pitagórica. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Analizar las propiedades y determinar los atributos de objetos de dos y tres dimensiones. ● Explorar las relaciones (incluyendo la congruencia y la semejanza) entre objetos geométricos de dos y tres dimensiones, formular y comprender conjeturas y resolver problemas relativos a ellos. ● Establecer la validez de conjeturas geométricas por medio de la deducción y la demostración de teoremas y criticar los argumentos de otros. ● Usar coordenadas
--	--	--	--

	propiedades.		<p>cartesianas y otros sistemas de coordenadas, como el de navegación, el de coordenadas polares o el de coordenadas esféricas, para analizar situaciones geométricas.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Investigar conjeturas y resolver problemas relativos a objetos bidimensionales y tridimensionales representadas con coordenadas cartesianas.
--	--------------	--	---

Localización y sistemas de representación

<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer nociones espaciales básicas como por ejemplo: dentro, fuera; delante, detrás. ● Comparar posiciones, es decir relaciones espaciales a partir de comparativos, como por ejemplo: “más ...que”; “tanto ...como”. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Describir la localización de figuras en el espacio utilizando las matemáticas 	<ul style="list-style-type: none"> ● Usar la geometría analítica para representar y examinar las propiedades de las figuras geométricas de dos dimensiones. ● Comprender el uso de coordenadas como un avance en la historia y el desarrollo de las matemáticas, en particular 	<ul style="list-style-type: none"> ● Usar la geometría analítica para representar y examinar las propiedades de las figuras geométricas de tres dimensiones. ● Investigar en qué contexto histórico se introducen las geometrías no euclídeas, en base a qué se hace y
---	---	--	--

		para la representación gráfica de conceptos.	qué repercusiones ha tenido en el desarrollo de la ciencia.
--	--	--	---

Movimientos y transformaciones

<ul style="list-style-type: none"> ● Realizar cambios de posición a través de giros y simetrías. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Generar figuras a partir del movimiento de figuras patrón iniciales. ● Distinguir qué tipo de movimiento se debe hacer para pasar de una figura a otra. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas. ● Examinar la congruencia, la semejanza y la simetría respecto a una recta o a un centro usando transformaciones, así como 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender y representar transformaciones de objetos en el plano o en el espacio, utilizando croquis, coordenadas, vectores, notación funcional y matrices. ● Usar varias representaciones para ayudar a entender los efectos de las transformaciones y de sus
---	--	---	---

		<p>la combinación de diversos movimientos.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Identificar los atributos y propiedades medibles de los objetos que permanecen invariantes tras una transformación. 	<p>composiciones.</p>
--	--	--	-----------------------

Visualización, razonamiento y modelización geométrica

	<ul style="list-style-type: none"> ● Utilizar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y patrones. ● Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en ámbitos no estrictamente matemáticos. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Usar herramientas visuales para representar y resolver problemas. ● Utilizar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas. ● Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de 	<ul style="list-style-type: none"> ● Dibujar y construir representaciones de objetos geométricos de dos y tres dimensiones utilizando distintas herramientas tecnológicas. ● Visualizar objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas y analizar sus secciones
--	--	--	---

		<p>matemáticas, como el arte, las ciencias y la vida diaria.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Reflexionar sobre las relaciones entre la geometría y el álgebra. 	<p>transversales.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Utilizar vectores para modelizar la posición y el movimiento de un objeto en el espacio tridimensional. ● Utilizar modelos matemáticos (geométricos, algebraicos, grafos,...) para resolver problemas y obtener ideas de otras disciplinas y áreas de interés.
--	--	--	---

El espacio y la forma abarcan una amplia gama de fenómenos que se encuentran en todas partes en nuestro mundo visual y físico: patrones, propiedades de objetos, posiciones y orientaciones, representaciones de objetos, decodificación y codificación de información visual, navegación e interacción dinámica con formas reales, así como con representaciones, movimiento, desplazamiento y la capacidad de anticipar acciones en el espacio. La geometría sirve como una base esencial para el espacio y la forma, pero la categoría se extiende más allá de la geometría tradicional en contenido, significado y método, basándose en elementos de otras áreas matemáticas como la visualización espacial, la medición y el álgebra o la pre-álgebra en los primeros cursos de primaria.

En toda la educación primaria y, también en secundaria, el uso de materiales manipulativos es esencial para familiarizar al aprendiz con las propiedades de las formas 2D y 3D, si alguna parte de las matemáticas debe “tocarse” esta es sin duda la geometría. También es importante la introducción de materiales virtuales desde edades tempranas en esta generación digital.

La geometría y la trigonometría nos permiten cuantificar el mundo físico, potenciando así nuestra percepción espacial en dos y en tres dimensiones y proporcionando herramientas necesarias para el análisis, la medición y la transformación de cantidades, movimientos y relaciones. La geometría incluye un enfoque intenso sobre el desarrollo cuidadoso del razonamiento y la demostración, utilizando definiciones y estableciendo hechos. El estudio de la geometría es esencial para desarrollar la capacidad de razonamiento y la resolución de problemas. La tecnología desempeña un papel importante en la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Herramientas como un programa de geometría dinámica, bastante habituales en las aulas de secundaria, deben serlo también en la medida adecuada en las aulas de primaria. Estas herramientas capacitan para modelizar una gran variedad de figuras de dos y tres dimensiones y para tener una experiencia interactiva con ellas.

En estas etapas se debería que prestar más atención a:

Infantil y Primaria

- Trabajar las matemáticas desde un enfoque más globalizado, haciendo patentes en el caso del sentido del espacio las relaciones de las matemáticas con el entorno.
- Analizar atributos compartidos por un conjunto de objetos, describirlos, representarlos en diferentes formatos (papel, materiales manipulativos, materiales virtuales) y, en su caso, ponerles un nombre que los aglutine.
- Construir figuras a partir de figuras elementales y viceversa descomponer figuras.
- Distinguir qué tipo de movimiento se debe realizar para pasar de una figura a otra.
- Predecir y describir el resultado de reflejar, trasladar y girar figuras de dos dimensiones.

- Identificar y describir la simetría axial y la central en figuras 2D y 3D y en diseños y cenefas.
- Incidir en aspectos del pensamiento geométrico, como el estudio de las figuras y sus propiedades (problemas de ángulos y de geometría deductiva en general), haciendo más hincapié en el reconocimiento de figuras y en la identificación de las propiedades más elementales.
- Introducir programas de geometría dinámica en sus versiones más simplificadas, con las prestaciones propias para desarrollar los contenidos de esta etapa, sin perder de vista la idea que la manipulación siempre debe ser un estado previo al uso del material virtual que supone un grado más de abstracción.

Secundaria Obligatoria

- Utilizar programas de geometría dinámica para trabajar la geometría, relacionar la geometría con álgebra y funciones y resolver problemas.
- Trabajar el reconocimiento o visualización de las características del espacio y la forma, manipulación física o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
- Establecer conexiones en la forma de abordar los problemas geométricos, que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica.

Bachillerato

- Trabajar el reconocimiento o visualización de las características del espacio y la forma, manipulación física o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
- Establecer conexiones en la forma de abordar los problemas geométricos, que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica.
- Utilizar grafos para modelizar y resolver problemas.

Merecen menos atención en:

Infantil y Primaria

- Memorizar definiciones y clasificaciones de figuras (por ejemplo, los diferentes cuadriláteros, clasificación de los triángulos según los ángulos, etc.).
- Memorizar los tipos de movimientos y aplicarlos sucesivamente a una figura.

Secundaria Obligatoria

- Memorizar definiciones y clasificaciones de figuras.

Bachillerato

- Memorizar definiciones y clasificaciones de figuras.

Sentido estocástico

El sentido estocástico es la capacidad para hacer frente a una amplia gama de situaciones cotidianas que implican el razonamiento y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas y la toma de decisiones a partir de la información estadística, su valoración crítica y la comprensión y comunicación de fenómenos aleatorios, y la capacidad de realizar algunas predicciones. Su desarrollo es progresivo pero se inicia en los primeros niveles de escolarización, pues está ligado a la intuición sobre la incertidumbre y, por ello, es necesario evitar que se generen sesgos o falsas concepciones.

Esta capacidad se concreta en la habilidad para llevar a cabo investigaciones estadísticas básicas (formulación de cuestiones que pueden responderse mediante datos, recolectarlos o considerar diversas muestras de datos, analizar los datos e interpretar los resultados del análisis) y la habilidad para reconocer cómo este proceso es crucial para todo razonamiento estocástico que incluye datos. Esta capacidad investigadora debe permitir interpretar la información que está al alcance del alumnado a través de diferentes fuentes: experiencias cotidianas, medios de comunicación, juegos (físicos y virtuales), deportes, tecnología y, a medida que se avanza en niveles educativos, conjuntos de datos cualitativos, cuantitativos discretos y continuos.

Y, a su vez, el sentido estocástico se concreta en la habilidad para reconocer la necesidad de los datos, para transnumerar (es decir, de cambiar la representación de los datos, de definir una medida que “estime” las cualidades o características de un cierto fenómeno, de transformar los datos en bruto a una tabla o gráfica que permita darles sentido o al “comunicar” el significado que el estadístico capta y surge de los datos de forma que sea comprensible para otras personas), de percibir la variabilidad de los datos y manejar modelos básicos o avanzados que permitan predecirla, de realizar hipótesis bajo estas situaciones de incertidumbre y, cuando proceda, contrastarlas formal o informalmente, de dar sentido al cálculo de la medida de esta incertidumbre (probabilidad) y de tomar decisiones en situaciones acordes con la edad considerada. Estas habilidades han de desarrollarse, sobre todo a medida que se avanza en nivel educativo, de una forma multivariada: estadística, probabilística y computacionalmente.

Estas habilidades deben desarrollarse de forma crítica, iniciándose en el manejo de la tecnología para el acceso a datos significativos, su exploración y visualización y, en su caso, la realización de simulaciones, y deben permitir evaluar críticamente información estocástica, incluida la de los medios de comunicación, pero no limitándose a ella, junto con la capacidad de discutir o comunicar sus opiniones o sus juicios respecto a tales informaciones estocásticas cuando sea relevante.

Comprende tres grandes ideas: Distribución, Inferencia y Predictibilidad e Incertidumbre, las tres están presentes en todas las etapas

Gran Idea sobre sentido estocástico	Infantil	Primaria	ESO	Bachillerato
Distribución				
Inferencia				
Predictibilidad e Incertidumbre				

En Educación Infantil todo el alumnado debería:	En Educación Primaria todo el alumnado debería:	En ESO todo el alumnado debería:	En Bachillerato todo el alumnado debería:
---	---	----------------------------------	---

Distribución

<ul style="list-style-type: none"> • Identificar datos y hechos sencillos a partir de variables cualitativas y discretas. • Llevar a cabo un recuento de casos (relacionándolo con la clasificación de objetos y con la serie numérica). • Representar los datos mediante objetos manipulables. 	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar los datos: clasificarlos en categorías y construir las tablas de recuento y de frecuencia (absoluta y relativa). • Visualizar e interpretar los datos mediante gráficos estadísticos, seleccionando el gráfico más idóneo para un determinado conjunto de datos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar los datos en tablas, visualizar, representar e interpretar gráficas que permitan reconocer cómo se distribuyen los datos y compararlos. • Interpretar la posible relación entre dos variables, valorando gráficamente, con el apoyo de la tecnología, la pertinencia de ajustar mediante una regresión lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Modelar fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial o normal.
	<ul style="list-style-type: none"> • Conocer las medidas de centralización (media, 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender y aplicar la noción de promedio como la 	<ul style="list-style-type: none"> • Distinguir entre los datos como valores individuales y

	<p>mediana y moda) y sus principales características.</p> <ul style="list-style-type: none"> Comprender el rango como medida de dispersión y la idea intuitiva de dispersión respecto a la media. 	<p>expresión del valor típico, de la participación justa, es el estimador de los datos o señal en medio del ruido de los datos.</p> <ul style="list-style-type: none"> Comprender y aplicar las medidas de centralización, como la media, mediana y moda, son descriptores de cómo se agrupan los datos. Analizar las variaciones que sufren los valores de los datos y analizar cómo dichas variaciones se utilizan para comparar grupos. 	<p>la distribución como entidad conceptual. En los que se deben examinar aspectos referidos al centro (media, mediana, moda), a la dispersión (rango, desviación media, desviación estándar o rango intercuartil, ...), densidad (frecuencia absoluta y relativa, cuartiles) o el sesgo de los datos.</p>
<ul style="list-style-type: none"> Comparar datos y hechos sencillos 	<ul style="list-style-type: none"> Comparar diferentes variables, a partir de su centro y dispersión y de sus representaciones gráficas (su forma). 	<ul style="list-style-type: none"> Reconocer que las medidas de dispersión (rango, varianza, desviación media, desviación típica) describen la variabilidad de los valores particulares de un conjunto de datos o como el rango de completo de un conjunto de datos, o su variabilidad a lo largo del tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> Describir y comparar distribuciones unidimensionales procedentes de múltiples contextos mediante gráficos y medidas de centralización y dispersión adecuadas. Describir y comparar conjuntos de datos de distribuciones

		<ul style="list-style-type: none"> • Interpretar la posible relación entre dos variables, valorando gráficamente, con el apoyo de la tecnología, la pertinencia de ajustar mediante una regresión lineal, cuadrática, exponencial o logarítmica 	<p>bidimensionales. Valorar el ajuste mediante rectas, funciones cuadráticas, exponenciales o logarítmicas. Cuantificar la relación lineal de los datos de ambas distribuciones mediante el coeficiente de correlación. Valorar en un contexto de resolución de problemas la fiabilidad de dichas mediciones.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la variabilidad de una distribución de datos debida a los valores particulares o como el rango de un conjunto de datos, a lo largo del tiempo, como rango de una muestra, como distancia a un punto fijo, como asociación o correlación y como distribución.
•	•	<ul style="list-style-type: none"> • Valorar porqué diferentes civilizaciones optan por usar 	

		datos como fuente de información y en qué momentos históricos lo hacen. También seguir la evolución de las formas de representación de los mismos.	
--	--	--	--

Inferencia

<ul style="list-style-type: none"> Plantear preguntas sencillas y recoger datos necesarios para poder responderlas. 	<ul style="list-style-type: none"> Diferenciar población y muestra y distinguir un muestreo aleatorio de uno no aleatorio. Analizar el tipo de datos que se pueden recoger para cada estudio y construir la noción de variable. Asociar los tipos de datos con las preguntas de interés que se pueden responder. Comparar diferentes muestras de la misma variable o diferentes repeticiones de un mismo experimento aleatorio (regularidades y diferencias, e influencia de la variabilidad en ellas). 	<ul style="list-style-type: none"> Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población. Para responderlas: recoger los datos, usando los métodos estadísticos y herramientas apropiadas; organizar los datos en tablas; construir gráficas; calcular las medidas de centralización y dispersión relevantes; y obtener conclusiones a partir de los resultados obtenidos con el fin de emitir juicios y/o tomar decisiones. 	<ul style="list-style-type: none"> Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población. Para responderlas: recoger los datos, usando los métodos estadísticos y herramientas apropiadas; organizar los datos en tablas; construir gráficas; calcular las medidas de centralización y dispersión relevantes; y obtener conclusiones a partir de los resultados obtenidos con el fin de emitir juicios y/o tomar decisiones.
<ul style="list-style-type: none"> Comprobación de conjeturas sencillas a partir de los datos 	<ul style="list-style-type: none"> Interpretar los datos en su contexto y formular y comprobar conjeturas a partir de los datos recogidos, visualizados y analizados, dándoles sentido en ese contexto. 		<ul style="list-style-type: none"> Dado un fenómeno estocástico, formular hipótesis que permitan ser respondidas mediante modelos de distribuciones de probabilidad binomial y normal, calculando sus

	<ul style="list-style-type: none"> • Tomar decisiones justificadas razonadamente a partir de la información, asumiendo los riesgos de la variabilidad. 		<p>parámetros y/o el intervalo de confianza, determinando la probabilidad de los diferentes sucesos o realizando simulaciones para obtener conjuntos de datos, con el fin de emitir juicios sobre dichas hipótesis y/o tomar decisiones asociadas a los mismos.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • 	<ul style="list-style-type: none"> • 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender cómo, mediante la inferencia estadística, la ciencia pudo controlar probabilísticamente el error cometido al analizar una población a partir de los datos de una muestra. 	<ul style="list-style-type: none"> •

Predictibilidad e Incertidumbre

<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la posibilidad/imposibilidad de que ocurran los hechos. Manejar el lenguaje básico referente a la posibilidad de ocurrencia (seguro, posible, imposible). 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprender la noción de incertidumbre y su imprevisibilidad. Manejar el lenguaje de la probabilidad. • Comprender la noción de experimento aleatorio (impredecible, pero conociendo los posibles resultados) 	<ul style="list-style-type: none"> • Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios. • Valorar las herramientas que ofrecen las matemáticas para analizar y hacer predicciones razonables acerca del comportamiento de los fenómenos aleatorios, a partir del: análisis de las intuiciones previas del alumnado, del análisis subjetivo del valor que aportan los datos y del estudio frecuencial de la repetición de un número significativo de veces la experiencia o el cálculo de su probabilidad. • Análisis de las intuiciones previas el análisis subjetivo del valor que aportan los datos y del estudio de las regularidades obtenidas al repetir un número 	<ul style="list-style-type: none"> • Valorar que la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos, sino la percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia de un suceso.
---	---	--	---

		significativo de veces la experiencia aleatoria, o el cálculo de su probabilidad.	
<ul style="list-style-type: none"> • Comparar la posibilidad de ocurrencia de hechos sencillos, sin realizar cálculos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Manejar la probabilidad bajo distintos significados y sus relaciones entre ellos: intuitivo, clásico o de Laplace, frecuentista, y subjetivo. • Manejar las reglas básicas del conteo de casos y su aplicación al cálculo de probabilidades en experimentos en los que sea aplicable la regla de Laplace. • Estimar la probabilidad mediante la estabilización de la frecuencia cuando se pueda repetir el experimento (ley de los grandes números) y mediante la información disponible (significado subjetivo). 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, utilizando la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento. • Calcular la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa y como medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible la experimentación; y, compararla, si procede, con el valor objetivo obtenido al aplicar la regla de Laplace. 	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular probabilidades simples y compuestas para resolver problemas de la vida cotidiana, mediante la regla de Laplace en combinación con diferentes técnicas de recuento. • Calcular la probabilidad a partir de su aproximación frecuencial o como medida de la incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, sea o no posible su experimentación. Comparar, si procede, dicho valor con el valor objetivo obtenido al aplicar la regla de Laplace. • Calcular la probabilidad condicional como un medio para actualizar las probabilidades cuando se conoce más información y,

			<p>por lo tanto, se pueden emitir juicios y tomar decisiones más adecuadas, a partir del uso de tablas de contingencia y la aplicación de los Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.</p>
•	•	<ul style="list-style-type: none"> • Valorar la necesidad de predecir el futuro en la historia de la humanidad. Reconocer las diferentes conceptualizaciones del azar, incertidumbre, aleatoriedad, probabilidad y riesgo asociadas a los diferentes momentos históricos 	•

Desde las primeras edades, el desarrollo del sentido estocástico pasa por la conexión entre las tres grandes ideas expuestas, es decir, no tratar separadamente la estadística descriptiva y la probabilidad, e incluso iniciarse en inferencias informales. Es necesario trabajar con los datos en un contexto, e interpretarlos dentro de él, dando sentido a los procedimientos de análisis que se utilicen: cálculo de parámetros relacionados con el centro y la dispersión de los datos y, sobre todo, visualización de gráficos. A partir de esta interpretación surgirán de manera natural tanto las preguntas a las que se pueda responder con los datos, como las posibles conjeturas que orientarán nuevos estudios estadísticos. El vínculo entre lo observado y lo conocido y lo que puede ocurrir en sucesivas experimentaciones viene dado por la predictibilidad, que nos permitirá cuantificar en términos de probabilidad la incertidumbre inherente a los experimentos aleatorios.

La lectura desde los datos hacia la comprensión de los aspectos de centro, dispersión, densidad y sesgo permitirán al alumnado construir la noción de distribución frecuencial de un conjunto de datos. Considerar la variabilidad como el rango probable de una muestra supone iniciarse en la inferencia estadística. Relacionar las características de las muestras con las de la población es el principal fin de la estadística y sirve para decidir qué datos recoger (muestreo) y para tener conclusiones con algún grado de probabilidad. Para desarrollar una comprensión informal de la inferencia desde la secundaria se debería comenzar por la discriminación entre la posición central y la variabilidad en las distribuciones de datos y el uso de estas características para decidir cuándo dos distribuciones son iguales o diferentes.

La idea de incertidumbre en los fenómenos estocásticos surge en diferentes situaciones. Por ejemplo, cuando se estima una población mediante una muestra, esta estimación se debe realizar reconociendo la incertidumbre inherente. Sin embargo, la expresión de esta incertidumbre, no conduce a una estrategia probabilística. En el reconocimiento de esta incertidumbre inherente existe la dualidad de pensar en la predictibilidad de la población mediante la muestra. Ambas ideas, predictibilidad e incertidumbre son ideas que tienen sentido, por sí mismas, cuando las relacionamos con las nociones de aleatoriedad, independencia y variación.

En estas etapas se debería que prestar más atención a:

Infantil y Primaria

- Construir tablas de frecuencia a partir de resultados experimentales y a partir del recuento.
- Estudiar los gráficos estadísticos más allá de los convencionales, presentes en medios de comunicación, videojuegos, infografía... Además del gráfico de barras y

el de sectores, deben interpretarse pictogramas, histogramas, mapas de árbol (treemap), nubes de términos, cartogramas, coropletas...

- Usar recursos tecnológicos para representar gráficos estadísticos y cambiar de representación.
- Aplicar los cuatro niveles de lectura de los gráficos: leer los datos, dentro de los datos, más allá de los datos y detrás de los datos. La comprensión conceptual de las medidas de centralización.
- Manejar situaciones o problemas donde esté presente la variabilidad, a través de diferentes interpretaciones de datos o valores, o de la existencia de más de una solución posible.
- Utilizar el soporte gráfico para comparar distribuciones en función de su centro y su dispersión (sin realizar cálculos).
- Valorar las fuentes de incertidumbre al estudiar la población a partir de la muestra. P. ej.: ¿qué ocurriría si tuviésemos otra muestra?
- Distinguir entre variables cualitativas y cuantitativas y, dentro de estas, entre variables discretas y continuas (refiriéndose a la agrupación de los valores en intervalos, y no a la distinción numérica entre naturales y reales).
- Dar importancia al contexto en los procesos de elaboración y comprobación de conjeturas.
- Tomar decisiones bajo incertidumbre, a partir de la información procesada y analizada.
- Distinguir entre los sucesos aleatorios de aquellos que sean equiprobables y los que no lo son.
- Manejar el significado intuitivo de la probabilidad desde las primeras edades. La distinción entre seguro, posible e imposible, ordenación de sucesos en atención a su probabilidad. El manejo del significado subjetivo o Bayesiano de la probabilidad: estimación de la probabilidad en contextos cotidianos en los que no sea aplicable la regla de Laplace o no sea posible la repetición del experimento aleatorio (p.ej. la probabilidad de lluvia, la probabilidad de que un equipo gane un partido).
- Utilizar el conteo de casos, utilizando el principio multiplicativo.
- Enfatizar la conexión de la probabilidad con los resultados estadísticos de los experimentos aleatorios.

Secundaria Obligatoria y Bachillerato

- Investigar situaciones relacionadas con las necesidades e intereses propios del grupo clase, la experimentación de situaciones físicas y químicas y/o del acceso a bases de datos contrastadas.
- Realizar un análisis exploratorio de la distribución de los datos a partir de la visualización y representación de gráficos y el cálculo de medidas de centralización y dispersión para comparar igualdades y diferencias entre variables y posibles asociaciones entre ellas.
- Comunicar los resultados de las investigaciones usando el lenguaje estocástico adecuado, de forma crítica y razonada que permita realizar inferencias informales, emitir juicios y/o tomar decisiones acordes.
- Reflexionar sobre cómo la investigación aporta sentido a la variabilidad, predictibilidad e incertidumbre subyacente a la muestra de datos estudiada.
- Incidir en que el aprendizaje de la noción de probabilidad implica la adquisición de un sentido de esperanza, variabilidad, predictibilidad e incertidumbre.
- Valorar la predictibilidad de ciertos sucesos de este fenómeno desde diferentes aproximaciones intuitivas, clásicas o laplacianas, frecuenciales y subjetivas.

Merecen menos atención:

Infantil y Primaria

- Calcular distintas frecuencias sin darles un uso concreto en el contexto en el que se trabaja. P.ej.: Calcula las frecuencias absolutas, relativas, acumuladas, etc.
- Representar manualmente gráficos estadísticos. Debería restringirse a los primeros pasos e insistir en la semiótica y los convenios del gráfico. No tiene sentido la representación manual de gráficos complejos. P. ej.: El uso de gráficos de sectores que no puedan ser realizados manualmente sin transportador de ángulos.
- Usar datos sin contexto y el cálculo de las medidas de centralización sin contexto ni interpretación. P. ej.: A partir de estos datos, calcula la media, la mediana y la moda.
- Tratar datos sin información o discusión mínima sobre su origen, o su relación con la población.
- Utilizar la extrapolación o la sobreinterpretación de la información sin tener en cuenta las limitaciones del estudio.
- Reiterar el cálculo de probabilidades exclusivamente mediante la regla de Laplace.
- Restringir la probabilidad a contextos de juegos de cartas, bolas, urnas, etc.
- Usar la probabilidad para situaciones de ausencia de incertidumbre o para experimentos ya realizados.

Secundaria Obligatoria y Bachillerato

- Reducir la estadística al cálculo de las medidas de centralización y dispersión descontextualizadas del proceso de investigación estadística.
- Reducir el cálculo de probabilidades al estudio de sucesos asociados a juegos, a la aplicación de técnicas repetitivas de recuento y a la axiomatización de sucesos.
- Realizar aprendizajes basados en proyectos, en problemas o en ámbitos donde la aplicación del estudio estocástico se reduzca a la determinación de las medidas de centralización, la comparación o asociación de datos.

Sentido de la medida

El sentido de la medida es necesario para comprender y comparar atributos de los objetos y los seres vivos de nuestro mundo. Este sentido se puede caracterizar por la capacidad del sujeto para estimar y contabilizar magnitudes. Se reconoce esta capacidad en el individuo que entiende y elige las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar atributos y utiliza las herramientas adecuadas para realizar mediciones. También utiliza la comprensión de las relaciones entre formas y medidas para desarrollar fórmulas para calcular, la longitud, el área, el volumen, además de otras magnitudes básicas. El estudio de la medida necesita de la experimentación con materiales concretos, la comparación de objetos físicos y seguir con el uso de diferentes instrumentos de medida. En la etapa secundaria los conceptos deben ir aumentando en complejidad, pero sin abandonar la experimentación (con ayuda de recursos tecnológicos), a partir de la cual el alumnado deberá formular conjeturas, estudiar relaciones y deducir fórmulas y propiedades matemáticas.

Los instrumentos de medida y las fórmulas de medición indirecta son centrales en esta área, siendo más importantes los primeros en la educación primaria y los segundos para la secundaria, sin caer en el error de desarrollar una larga lista de fórmulas para calcular áreas o perímetros. En la etapa de Bachillerato el salto al límite permitirá medir el cambio de los procesos e incorporar el cálculo integral como herramienta para la medida de superficies.

Gran idea sobre sentido de la medida	Infantil	Primaria	ESO	Bachillerato
Magnitud				
Medición				
Estimación y relaciones				
Cambio				

En todas las etapas el alumnado debería mediante manipulación, observación y razonamiento (empleando medios tecnológicos, si fuera preciso)

En Educación Infantil todo el alumnado debería:	En Educación Primaria todo el alumnado debería:	En ESO todo el alumnado debería:	En Bachillerato todo el alumnado debería:
---	---	----------------------------------	---

Magnitud

<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer los atributos mensurables de los objetos (volumen, longitud, masa, capacidad, grosor, tiempo). ● Componer y descomponer atributos mensurables de un objeto. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Identificar los atributos mensurables de los objetos, en particular de las formas geométricas en 2D y 3D. ● Elegir la unidad adecuada para medir un objeto. ● Utilizar el instrumento adecuado para medir y saberlo usar. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer los atributos mensurables de los objetos físicos y matemáticos. ● Conocer las unidades, procesos y sistemas de medida. ● Tomar decisiones sobre unidades y escalas adecuadas en problemas que impliquen medida. ● Comprender la necesidad de las unidades de medida y el hecho de que en origen sean convenciones locales. Valorar en qué momento las unidades locales dejan de ser eficaces y en qué contexto histórico se 	
--	---	--	--

		determinó que hacían falta unas unidades de medida universales.	
--	--	---	--

Medición

	<ul style="list-style-type: none"> • Calcular medidas indirectas utilizando la descomposición en formas más simples del objeto a medir (cálculo de áreas y volúmenes). • Construir o dibujar objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Deducir y aplicar las principales fórmulas para obtener áreas y volúmenes de formas planas y tridimensionales. • Dibujar objetos geométricos con propiedades fijadas, como las longitudes de los lados o las medidas de los ángulos. • Usar representaciones planas de objetos tridimensionales para visualizar y resolver problemas de áreas y volúmenes, entre otros. • Valorar el motivo por el que se hicieron diferentes 	<ul style="list-style-type: none"> • Usar relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares. • Resolver problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas. • Interpretar la integral definida como el área bajo una curva. • Utilizar técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas. • Aplicar el concepto de integral a la resolución de
--	--	--	--

		<p>exploraciones científicas para medir arcos del meridiano terrestre, como indagación sobre la forma de la esfera terrestre y como referencia para establecer una medida universal que no dependiera de las medidas antropomórficas.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Comprender la necesidad que han tenido las diferentes civilizaciones de medir el tiempo, vincularlo a la observación de los astros (astronomía) y al tipo de calendario que establecen (lunar y/o solar). 	<p>problemas que impliquen cálculo de superficies planas o volúmenes de revolución.</p>
--	--	---	---

Estimación y relaciones

<ul style="list-style-type: none"> • Clasificar los objetos según sus atributos mensurables. • Ordenar los objetos según sus atributos mensurables. • Correspondencias entre objetos a partir de sus atributos mensurables. 	<ul style="list-style-type: none"> • Estimar medidas por comparación con otras medidas. • Evaluar resultados de mediciones o cálculos de medidas indirectas y razonar si son posibles o no. 	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar conjeturas sobre medidas o relaciones entre las mismas, basadas en estimaciones. • Analizar la precisión, la exactitud y el error aproximado en situaciones de medida. • Aplicar conceptos informales de aproximaciones sucesivas, acotaciones y límite en procesos de medida. 	
--	---	---	--

Cambio

		<ul style="list-style-type: none"> • Estudiar el concepto de tasa de variación media en contextos científicos como: 	<ul style="list-style-type: none"> • Construir el concepto de derivada a partir del estudio del cambio en diferentes
--	--	--	---

		<p>cinemática, movimientos ondulatorios, cinética, química...</p>	<p>contextos.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretar la derivada como función pendiente y como razón de cambio en contextos concretos. • Estimar o calcular el valor de un límite a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica y aplicarlo al estudio de la continuidad de una función. • Aplicar los conceptos de límite, derivada a la representación y al estudio de situaciones susceptibles de ser tratadas mediante las funciones.
--	--	---	---

En estas etapas se debería que prestar más atención a:

Infantil y Primaria

- Familiarizarse con la medida a través de la manipulación, comparación y estudio de objetos del entorno.
- Comprender la necesidad de medir con unidades estándar y familiarizarse con ellas.
- Estimar medidas de objetos de uso común de forma presencial, y evaluar estimaciones de medidas de objetos no presenciales.
- Desarrollar estrategias para estimar perímetros, áreas y volúmenes de figuras irregulares.

Secundaria Obligatoria

- Destacar la construcción de modelos del mundo real y desarrollar técnicas de resolución de problemas.
- Reconocer o visualizar las características del espacio y la forma, manipulando físicamente o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
- Establecer conexiones entre la forma de abordar los problemas geométricos que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica.

Bachillerato

- Reconocer o visualizar las características del espacio y la forma, manipulando físicamente o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas.
- Destacar la construcción de modelos del mundo real y desarrollar técnicas de resolución de problemas.
- Hacer un uso apropiado de calculadoras y ordenadores.
- Promover la experimentación y la formulación de conjeturas.
- Establecer conexiones entre la forma de abordar los problemas geométricos que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica.

Merecen menos atención en:

Infantil y Primaria

- Reducir los problemas geométricos a problemas de cálculo de medidas de perímetros, áreas y volúmenes de cuerpos regulares utilizando las fórmulas correspondientes.

Secundaria Obligatoria

- Reducir la geometría al estudio de los problemas de medida y al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, con ayuda de las fórmulas correspondientes.
- Realizar ejercicios de cambio de unidades repetitivos y descontextualizados.

Bachillerato

- Memorizar y manipular fórmulas e identidades trigonométricas.
- Realizar un estudio completo de las propiedades de una función con el único objeto de su representación.
- Desarrollar complicadas destrezas manipulativas (Cálculo de límites, derivadas o primitivas no usuales).

Sentido numérico

El aprendizaje de la numeración y el cálculo es una parte central de la formación matemática del alumnado. Pero el papel más relevante de esta parte de las matemáticas no se reduce a aprender a reproducir los algoritmos tradicionales para calcular. En la sociedad actual, en la que se tiene acceso fácil a instrumentos y aplicaciones que realizan cálculos matemáticos de todo tipo, es necesario replantear la enseñanza de las matemáticas de modo que se reduzca el tiempo que el alumnado dedica a memorizar y reproducir técnicas. La sociedad necesita formar personas con sentido crítico, con capacidad para comunicar y argumentar con lógica, que sean creativas a la hora de resolver problemas, que usen con criterio las tecnologías que están a su alcance. En consecuencia, el aprendizaje de la numeración y el cálculo ha de orientarse a desarrollar las habilidades complejas y los modos de pensar matemáticos que conforman lo que se denomina el sentido numérico.

El sentido numérico se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones. Requiere una buena intuición sobre las relaciones entre números y el dominio del cálculo mental. El alumnado que ha desarrollado el sentido numérico utiliza regularmente las relaciones entre números para dar sentido a los cálculos, elige la mejor representación numérica, la estrategia de cálculo que mejor se adapta a cada situación y evalúa si los resultados son razonables.

El sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar situaciones que requieren el empleo de números y operaciones con flexibilidad y comprensión. Las actividades que promueven el desarrollo del sentido numérico plantean situaciones en las que hay que estimar y aproximar, componer y descomponer números, comunicar e interpretar información numérica, buscar relaciones y patrones en los números, reconocer errores al operar con números, usar diferentes niveles de precisión con los números, inventar formas de calcular un resultado o usar un resultado numérico para tomar una decisión.

Las principales capacidades que caracterizan el sentido numérico son: reconocer cómo y cuándo usar los números, discernir en qué ocasiones se requiere un valor exacto y cuándo es posible dar un valor aproximado, detectar y usar relaciones o propiedades entre números, percibir la magnitud de los números, realizar cálculos mediante procedimientos diferentes adaptados a cada situación, conocer y usar distintas representaciones de los números, y aceptar distintas estrategias para resolver

problemas aritméticos. Estas capacidades son una concreción al ámbito numérico de procesos matemáticos generales como el razonamiento, las conexiones, la comunicación, la representación, la selección de técnicas y herramientas o la resolución de problemas. Seguidamente se proporcionará un mayor detalle, especificando el alcance de estas capacidades a través de las grandes ideas matemáticas que organizan el dominio numérico: el proceso de contar, la noción de cantidad, el sentido de las operaciones aritméticas, las relaciones numéricas y el razonamiento proporcional.

Gran idea sobre sentido numérico	Infantil	Primaria			ESO	Bachillerato
		1 y 2	3 y 4	5 y 6		
Conteo						
Cantidad						
Sentido de las operaciones						
Relaciones						
Razonamiento proporcional						

En Educación Infantil todo el alumnado debería:	En Educación Primaria todo el alumnado debería:	En ESO todo el alumnado debería:	En Bachillerato todo el alumnado debería:
---	---	----------------------------------	---

Conteo

<ul style="list-style-type: none"> ● Contar en situaciones contextualizadas y representar gráficamente el conteo. Por ejemplo, contar los pasos dados para ir de un lugar a otro y hacer una marca en una hoja por cada paso dado. ● Hacer series numéricas con números pequeños. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Recitar la serie numérica, asignando un número a cada objeto de una colección sin repetir y sin que falte ninguno. ● Relacionar el número (nombre y símbolo) con la cantidad total de objetos contados en situaciones contextualizadas. ● Desarrollar estrategias variadas para contar de manera eficiente (recolocar o agrupar los objetos, contar de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, de 100 en 100, contar hacia atrás...) ● Utilizar el conteo como estrategia informal para resolver problemas adaptando el tipo de conteo al tamaño de los números. ● Hacer recuentos sistemáticos en 	<ul style="list-style-type: none"> ● Resolver situaciones y problemas en los que se tengan que contar los elementos de un conjunto sin la necesidad de contarlos uno a uno (diagramas de árbol, técnicas de combinatoria, estrategias informales y personales de recuento adaptadas al problema, llegando solo si es necesario al uso de fórmulas) ● Investigar de dónde vienen las cifras actuales, desde cuándo se usan y compararlas con otras provenientes de otras civilizaciones y culturas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar la comprensión de las permutaciones, las combinaciones y las variaciones como técnicas de conteo.
---	--	--	---

	<p>situaciones contextualizadas.</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer la multiplicación como método de conteo de los casos posibles que se dan al combinar dos conjuntos. 		
--	--	--	--

Cantidad

<ul style="list-style-type: none"> ● Usar los cuantificadores básicos: todos, muchos, pocos, algunos. ● Agrupar elementos por criterios cuantitativos. ● Identificar cantidades pequeñas por subitización o por conteo. ● Representar gráficamente y/o simbólicamente cantidades pequeñas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer que los conjuntos de objetos tienen una cualidad –su cantidad– que puede expresarse mediante números. ● Comparar conjuntos de objetos respecto de su cantidad. ● Comprender y manipular el orden de magnitud de los números. ● Relacionar el efecto del aumento o la disminución de cantidades en las operaciones aritméticas ● Representar una misma cantidad de distintas formas ● Hacer estimación de cantidades de forma razonada. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar el significado de los porcentajes mayores que 100 y menores que 1 ● Desarrollar la comprensión de los números grandes, y reconocer y usar apropiadamente las notaciones exponencial, científica, a mano y con la calculadora. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Desarrollar una comprensión más profunda de los números muy grandes y de los muy pequeños, y de sus diversas maneras de representarlos.
--	---	--	---

Sentido de las operaciones

<ul style="list-style-type: none"> ● Hacer composiciones y descomposiciones de números pequeños. ● Resolver problemas aritméticos mediante estrategias informales basadas en acciones con cantidades pequeñas (reunir, separar, reiterar, repartir, etc.) y en el conteo. ● Representar gráfica y/o simbólicamente resultados de acciones con cantidades pequeñas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Usar el conocimiento sobre conteo, composición y descomposición de números, completación, compensación y valor posicional para realizar cálculos ● Reconocer qué operaciones aritméticas son útiles para resolver situaciones contextualizadas ● Conocer y emplear las propiedades de las operaciones aritméticas para realizar cálculos de manera eficiente ● Realizar las operaciones aritméticas con flexibilidad y sentido, usando estrategias adaptadas a cada situación 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender el significado y los efectos de las operaciones aritméticas con fracciones, decimales y enteros ● Utilizar las propiedades asociativa y conmutativa de la adición y la multiplicación, y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, para realizar de manera eficiente cálculos con enteros, fracciones y decimales. ● Comprender y utilizar las relaciones inversas entre la adición y la sustracción, la multiplicación y la división, elevar al cuadrado y extraer raíz cuadrada, para simplificar cálculos y resolver problemas. ● Desarrollar y usar estrategias 	<ul style="list-style-type: none"> ● Enjuiciar los efectos de operaciones como la multiplicación, la división y el cálculo de potencias y raíces sobre las magnitudes de las cantidades. ● Desarrollar la comprensión de las propiedades y las representaciones de la adición y la multiplicación de vectores y matrices. ● Desarrollar destreza para operar con números reales, vectores y matrices, utilizando el cálculo mental o escrito en los casos sencillos y de la tecnología en los casos más complicados.
---	--	--	---

		para estimar los resultados de los cálculos con números racionales, y juzgar si estos resultados son razonables	
--	--	---	--

Relaciones

<ul style="list-style-type: none"> ● Comparar conjuntos de objetos por criterio cuantitativo, mediante conteo en casos sencillos o por correspondencia en casos más complejos. ● Establecer relaciones entre objetos a partir de un criterio cuantitativo: clasificaciones, ordenaciones, correspondencias y series numéricas. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender y utilizar las características del sistema de numeración de base diez y las relaciones entre números que genera este sistema ● Componer y descomponer números para relacionarlos ● Buscar regularidades entre números, compararlos, ordenarlos ● Comprender y utilizar las relaciones entre las operaciones aritméticas ● Justificar las propiedades observadas entre los números 	<ul style="list-style-type: none"> ● Reflexionar sobre el potencial del sistema de numeración decimal posicional para los números naturales y sobre el origen de la numeración ● Comparar y ordenar fracciones, decimales y porcentajes con eficacia, y encontrar su situación aproximada en la recta numérica ● Desarrollar el significado de los números enteros y representar y comparar cantidades con ellos ● Utilizar factores, múltiplos, factorización en números primos y números primos 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comparar y contrastar las propiedades de los números y de los conjuntos numéricos, incluyendo los números racionales y los reales, y comprender los números complejos como soluciones de ecuaciones cuadráticas que carecen de raíces reales. ● Comprender en qué contextos y con qué fin en la historia de las matemáticas incorpora los diferentes conjuntos numéricos hasta llegar a los números complejos.
--	--	---	---

		<p>entre sí para resolver problemas</p> <ul style="list-style-type: none"> ● Ver los decimales como una notación y no un conjunto (distinguir entre racionales e irracionales) ● Identificar qué conjunto numérico sirve para responder a diferentes necesidades: contar, medir, comparar, resolver ecuaciones... ● Evaluar las ventajas del sistema decimal frente a otro tipo de sistema de numeración e investigar desde cuándo se usa. ● Evaluar las ventajas de un sistema posicional tanto para la lectura de las cantidades como para realizar operaciones. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Entender los vectores y las matrices como estructuras que poseen algunas de las propiedades de los números reales.
--	--	--	--

Razonamiento proporcional

	<ul style="list-style-type: none"> ● Reconocer y utilizar la proporcionalidad como comparación multiplicativa entre ratios en actividades contextualizadas, incluyendo porcentajes y escalas. ● Distinguir situaciones proporcionales y no proporcionales. 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender y utilizar razones y proporciones para representar relaciones cuantitativas ● Comprender y utilizar porcentajes para representar partes del todo y para resolver problemas. ● Desarrollar, analizar y explicar métodos para resolver problemas relacionados con proporciones, como usar escalas y hallar razones equivalentes 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comprender el modelo proporcional como un modelo más. Utilizar diversidad de modelos para enjuiciar lo razonable de los cálculos numéricos y sus resultados.
--	--	--	--

En estas etapas se debería prestar más atención a:

Infantil y Primaria

- Comprender y usar los números, siendo capaz de leer, representar, contar, ordenar, estimar, comparar, componer, descomponer y recomponer números.
- Reconocer las propiedades de los números, comprender cómo se comportan los números en las operaciones y aprovechar esa comprensión para dominar los hechos numéricos y realizar cálculos mediante una variedad de métodos.
- Desarrollar habilidades de cálculo mental y de cálculo estimativo.
- Realizar cálculos con precisión y coherencia, por distintos métodos, de forma justificada y adaptándose con flexibilidad al tipo de situación que se plantea.
- Utilizar recursos tecnológicos para realizar cálculos y para buscar propiedades o regularidades entre números.
- Iniciarse en el razonamiento proporcional a través de la comprensión de situaciones multiplicativas.

Secundaria Obligatoria

- Utilizar las fracciones equivalentes, decimales y porcentajes, utilizándolos en razonamientos de proporcionalidad, dándole significado a estos conceptos.
- Ordenar y comparar números racionales utilizando diversas estrategias.
- Operar con fracciones. Las intuiciones del alumnado sobre las operaciones deberían adaptarse cuando trabajan con una estructura numérica ampliada. Por ejemplo, al multiplicar un número natural por una fracción comprendida entre 0 y 1 el resultado es menor que dicho número natural. Esto contradice su experiencia previa (con números naturales).
- Al pasar de los números naturales a los enteros, las intuiciones del alumnado sobre orden y magnitud serán más fiables y tendrán una visión de cómo funcionan estos conjuntos de números.
- Utilizar variables y funciones para representar relaciones entre conjuntos de números y ver propiedades de las distintas clases de números.
- Desarrollar la capacidad del alumnado de generar razones numéricas para hacer comparaciones en situaciones que se refieran a parejas de números.

Bachillerato

- Ver los conjuntos numéricos desde una perspectiva más global. Aunque en los niveles superiores se da más importancia a otras áreas que a los números, el alumnado debería aprender las diferencias entre estos conjuntos y qué propiedades se conservan y cuáles no al pasar de un conjunto a otro.

- Experimentar con otras clases de conjuntos en los que aparecen números con propiedades y patrones nuevos, cuando se aprende a combinar aritméticamente vectores y matrices
- Operar con fluidez números reales y tener cierta competencia con vectores y matrices para resolver problemas, utilizando la tecnología cuando sea apropiado.
- Saber decidir inteligentemente qué herramientas usar y cuándo usarlas para realizar cálculos con fluidez: saber elegir entre el cálculo mental, estrategias de lápiz y papel, la estimación y el uso de la calculadora.

Merecen menos atención

Primaria

- Memorizar los algoritmos tradicionales de cálculo, y reproducirlos sin contextualizar y sin comprensión.
- Memorizar las propiedades elementales de los números y de las operaciones, y aplicarlas de forma rutinaria.
- Aplicar la regla de tres para calcular un factor desconocido en situaciones de proporcionalidad.

Secundaria Obligatoria

- Efectuar operaciones interminables con castillos de fracciones, radicales, logaritmos, exponenciales...
- Seguir algoritmos sin significado para realizar operaciones.
- Aplicar el algoritmo de la raíz cuadrada.
- Calcular con lápiz y papel operaciones que en la vida real efectuaríamos usando la calculadora.

Bachillerato

- Racionalizar.
- Calcular con radicales sin significado y sin que sirva para resolver un problema.

Referencias

- Alsina, À. (2021). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(2), 1-20.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En D. Ben-Zvi, y J. Garfield, *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (págs. 147-168). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. A. (2020). *Pre K-12 guidelines for assessment and instruction in statistics education II (GAISE II)*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., y Sanchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Battista, M. T. (2016). *Reasoning and sensemaking in the mathematics classroom, pre-k-grade 2*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Battista, M. T. (2017). *Reasoning and SenseMaking in the Mathematics Classroom Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (eds.). (2017). *International handbook of research in statistics education*. Springer.
- Blanton, M.L. y Kaput, J.L. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En J. Cai, E. Knuth (eds.). *Early Algebraization, Advances in Mathematics Education*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). Learning Trajectories in early mathematics—sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of language and literacy development*, 7, 1-6.
- Cornejo-Morales, C. y Alsina, Á. (2020). La argumentación en los currículos de Educación Matemática Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(1), 12-30.
- De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Utrecht: OW & OC, Utrecht University.

Departament d'Educació, Generalitat de Catalunya (2012). *Competències bàsiques. Educació primària. Educació secundària. Obtenido de* <http://educacio.gencat.cat/ca/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/>

Direção -Geral da Educação. (2018a). *Aprendizagens Essenciais - Ensino Básico. Obtenido de* <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico>

Direção -Geral da Educação. (2018b). *Aprendizagens Essenciais - Ensino Secundário. Obtenido de* <http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-secundario>

Eichler, A., y Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical Research in Statistics Education. ICME-13 Topical Surveys*. Springer Nature.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del Álgebra Educativa*. Grupo Editorial Iberoamericana. México DF.

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2007). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Flores, P., & Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gal, I. (2005). Towards "Probability Literacy" for all Citizens: Building Blocks and Instructional Dilemmas. En G. A. Jones, *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (págs. 39-64). Springer Science + Business Media, Inc.

Govern d'Andorra. (1997). Decret del programa de primera ensenyança. Obtenido de <https://www.bopa.ad/bopa/009053/Pagines/26C6.aspx>

Govern d'Andorra. (2018). Programa de matemàtiques de segona ensenyança de l'Escola Andorrana. Obtenido de https://www.educacio.ad/images/stories/estudis/2aEnsenyanca/Prog2Ense_Matematiques.pdf

Govern d'Andorra. (2019a). Programa de l'assignatura de matemàtiques científicotècniques del batxillerat general de l'Escola Andorrana. Obtenido de https://www.educacio.ad/images/stories/estudis/Batxillerat/ProgBatx_Matematiques Cientificotecniques.pdf

Govern d'Andorra. (2019b). Programa de l'assignatura de matemàtiques aplicades a les ciències socials del batxillerat general de l'Escola Andorrana. Obtenido de https://www.educacio.ad/images/stories/estudis/Batxillerat/ProgBatx_Matematiques CSocials.pdf

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD- β Press / Freudenthal Institute.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Papanastasiou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Springer.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. «BOE» núm. 106, de 04 de mayo de 2006.

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. «BOE» núm. 340, de 30 de diciembre de 2020

Maloney, A. P., Confrey, J., & Nguyen, K. H. (Eds.). (2014). *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education*. IAP.

Martín De Diego, D., Chacón, T., Curbera, G., Marcellán, F., & Siles, M. (Coords.). (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces. Real Sociedad Matemática Española. Madrid.

MEC, (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, número 5, de 5 de enero de 2007., s.l.: s.n.

NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Versión castellana: Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Traducción y edición realizada por SAEM Thales (Sevilla, 1991).

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Versión castellana: *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción y edición realizada por SAEM Thales (Sevilla, 2003).

NCTM. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. NCTM.

Niss, M. (2003a). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KoM project. En A. Gagatsis and S. Papastavridis (eds.). *3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education*. The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society. Athens.

Niss, M. (2003b). Quantitative Literacy and Mathematics Competencies. En *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges* (pp. 215-220).

Niss, M. and T. Højgaard (eds.) (2011), *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the Development of Mathematics Teaching and Learning in Denmark*, Ministry of Education Report. No. 485. Roskilde University. Roskilde.

OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris.

OCDE. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Draft. OECD Publishing, Paris.

OCDE. (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030. Conceptual Learning Framework*. OECD Publishing, Paris.

Ontario Ministry of Education. (2005a). The Ontario Curriculum: Mathematics, grades 1 to 8. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Obtenido de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf>

Ontario Ministry of Education. (2005b). The Ontario curriculum: Mathematics, grades 9 and 10. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Obtenido de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math910curr.pdf>

Ontario Ministry of Education. (2007). The Ontario curriculum: Mathematics, grades 11 and 12. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Obtenido de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math1112currb.pdf>

Ontario Ministry of Education. (2020). The Ontario curriculum, Grades 1-8: Mathematics 2020. Toronto: Queen's Printer for Ontario. Obtenido de <https://www.dcp.edu.gov.on.ca/en/curriculum/elementary-mathematics>

- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L., y Díez, A. (2011). Las matemáticas y el maestro de primaria. I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. pp. 23-45. Ediciones Pirámide: Madrid.
- Rico, L., & Moreno, A. (2016). *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria*. Ediciones Pirámide.
- Ruiz, A. (2015). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, No.13, 15-33.
- Ruiz-Hidalgo, J. F.; Flores Martínez, P.; Ramírez-Uclés, R. y Fernández-Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación matemática*, vol.31, n.1, pp.121-143.
- Shaughnessy, M. (2019). Recommendations about the Big Ideas in Statistics Education: A Retrospective from Curriculum and Research. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 44-58.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sensemaking in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
- Segovia, I., & Rico, L. (2016). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.
- Shimizu, Y., & Vithal, R. (eds.). (2018). *24th ICMI Study Conference. School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities*. Tsukuba, Japón: ICMI, University of Tsukuba.
- Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (eds.). (2006). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (Vol. 8). Springer Science & Business Media.
- Taguma, M., Gabriel, F., & Lim, M. H. (2019). *Future of Education and Skills 2030: Curriculum analysis: A Synthesis of Research on Learning Trajectories/Progressions in Mathematics*. OECD.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas project*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713-717). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Wild, C., and Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 221-248.