XXVI OLIMPIADA NACIONAL

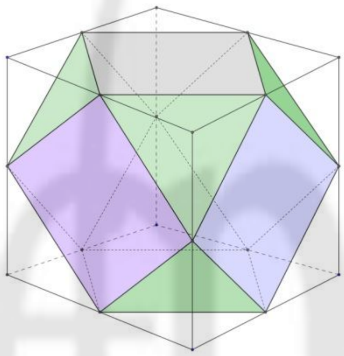
Huesca, 2015

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

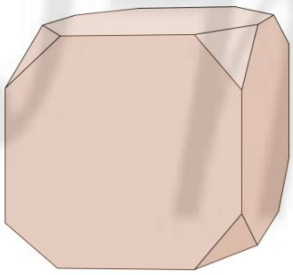
Problema 1

Se cortan las esquinas de un cubo de 10 cm de arista por los puntos medios de éstas, obteniéndose un "cuboctaedro" formado por 6 caras cuadradas y 8 triángulos equiláteros (ver figura).

1. Calcula el volumen de este cuboctaedro.



En otro cubo del mismo tamaño se marcan los puntos de las aristas que distan 2 cm del vértice más cercano y, después, se cortan las esquinas por esos puntos, obteniéndose en este caso un cubo "truncado" formado por 6 caras octogonales (irregulares) y 8 triángulos equiláteros (ver figura).

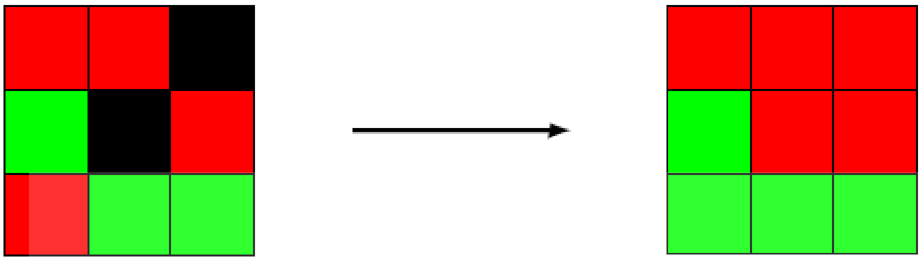


2. Calcula el área total de este cubo truncado.
3. ¿A qué distancia de los vértices se tendría que haber cortado las esquinas para que los octógonos del cubo truncado fuesen regulares (iguales todas sus aristas)?.

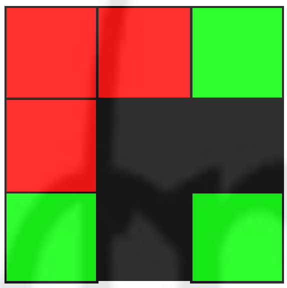
Problema 2

Considera un cuadrado (como en el ejemplo de abajo) partido en nueve subcuadrados. Cada uno de estos subcuadrados está pintado de **rojo**, **verde** o **negro**. Una *repintada* de este cuadrado consiste en coger una fila, columna, o diagonal, y en alterar los colores allí de modo que cambiamos **rojo** por **verde**, **verde** por **negro** y **negro** por **rojo**.

Ejemplo:

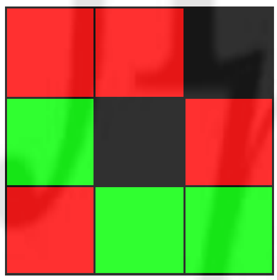


1. Transforma, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado



en el cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo.

2. Se puede transformar, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado



en el cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo?[1]

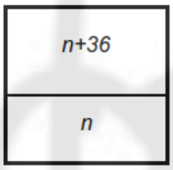
[1] Ayuda: considera el número de subcuadrados verdes menos el número de subcuadrados rojos.

Problema 3

El castillo de Loarre, cuya imagen puedes ver en la figura, fue construido para organizar ataques contra las localidades situadas a sus pies. Es del siglo XI y por su buena conservación es uno de los mejores ejemplos de arquitectura militar y civil del románico en España.

Este sábado lo visitaremos y lo haremos vestidos de guerreros medievales. Necesitaremos de un rey o una reina que nos dirijan pues es muy posible que mientras estemos en él se pueda producir un "combate medieval". ¿Serías un buen rey o reina organizando a tus guerreros?

Supón que puedes disponer a todos tus arqueros en **forma de cuadrado**, con todos ellos uniformemente distribuidos en filas y columnas. El número de arqueros es tal que el cuadrado se puede dividir en dos rectángulos de manera que uno de los rectángulos tiene 36 arqueros más que el otro (ver figura).



1. ¿De cuántos arqueros dispone en total?

Supón ahora que organizas a todos tus arqueros en una fila

2. Si dispones de 25 caballeros entonces

   $$25! = 15511121004333\boxed{}980984000000$$

   son todas las formas de disponer a todos tus caballeros en fila. [2]

   ¡Vaya! Se ha borrado una de las cifras. ¿Sabría calcular el número que falta en el cuadrado?

3. Por cierto, si dos de tus 25 caballeros quisieran ir juntos en la fila, ¿de cuántas formas podría ordenarse la fila? [3]

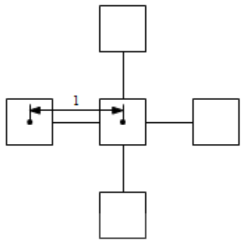
4. Si observas las formas de ordenar los caballeros se tiene que 4! = 24 no acaba en cero pero 5! = 120 tiene un cero al final y 25! Tiene 6 ceros al final. ¿Cuántos ceros finales tendrá el número de formas de ordenar en fila 100 caballeros?

[2] El modo de contar el número de formas de ordenar en una fila n elementos es calculando el *factorial* del número n que se define como *el número formado por el producto de todos los números naturales menores o iguales a n* y se denota $n!$. Por ejemplo, si tenemos 2 caballeros llamados A y B los podemos ordenar en fila como: AB o BA, luego tenemos $2 = 2 \cdot 1 = 2!$ formas. Si tenemos a 3 caballeros llamados A, B y C los podemos ordenar en fila como: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB o CBA, luego tenemos $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ formas. Para el caso de 4 caballeros sería $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ formas, para 5 caballeros sería $120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ formas y así sucesivamente.

[3] Ya que el número es muy grande lo puedes dar utilizando la notación de número factorial.

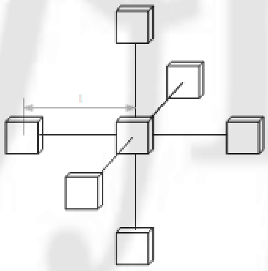
Problema 4

En el lejano planeta Z2 existe una raza inteligente que se caracteriza por construir sus ciudades de una manera especial. Comienzan levantando un edificio central, y el resto los añaden por etapas. En la primera etapa construyen un edificio al norte del inicial, otro al sur, otro al este y otro al oeste, todos ellos a distancia 1 (ver figura). En cada etapa se procede de la misma manera con todos los edificios existentes: se construyen a su alrededor los cuatro edificios correspondientes, salvo aquellos que ya estén construidos de alguna etapa anterior.



1. ¿cuántos edificios se construyen en la ciudad en la quinta etapa? ¿Y en la n-ésima?
2. ¿Cuál es la distancia mínima al edificio central de los edificios que se construyen en la quita etapa? ¿Y en la n-ésima?

Unos pocos siglos más tarde, volvemos para ver qué fue de estos simpáticos alienígenas. Su desarrollo científico y tecnológico ha sido considerable en este tiempo, ya que nos los encontramos afanados en la construcción de una compleja estación espacial en órbita alrededor de su planeta. Sin embargo, algunas costumbres nunca se pierden: el método de construcción de la estación es prácticamente el mismo que seguían para sus ciudades. Parten de un módulo central, donde se ubicará la sala de mando, y en sucesivas etapas acoplan a cada módulo existente hasta seis módulos más: encima, debajo, a la izquierda, a la derecha, delante y detrás, formando ángulos rectos y todos a la misma distancia, que volvemos a tomar igual a la unidad (ver figura). Por supuesto, si alguno de estos módulos ya ha sido añadido en una etapa anterior no lo vuelven a poner. Así pues, nos toca resolver otra vez el problema anterior, pero en esta ocasión en tres dimensiones:



1. ¿cuántos edificios se añaden en la ciudad en la quinta etapa? ¿Y en la n-ésima?
2. ¿Cuál es la distancia mínima al edificio central de los edificios que se añaden en la quita etapa? ¿Y en la n-ésima?