3º Ciclo de Primaria

Problema 01. Diferencia de edades

Vega en el día de hoy triplica la edad de su hermano Víctor, pero dentro de 5 años solamente la duplicará.

¿Cuáles son las edades actuales de estos dos hermanos?

Solución

La edad de Víctor es de 5 años y la de su hermana Vega es el triple, es decir, 15 años, ya que para que la edad del mayor pase a ser de triple a doble de la del menor la cantidad que se le debe añadir a éste debe ser igual a la edad actual del mismo, en este caso 5 años.

Demostremos que eso ocurre siempre generalizando el razonamiento, llamemos "x" a la edad del menor, "$3x$" a la edad del mayor y "n" al número de años que debe transcurrir para que la edad del mayor sea doble a la del menor.

Para ello, planteemos y resolvamos la siguiente ecuación:

$$3x + n = 2(x + n) \quad \Rightarrow \quad 3x + n = 2x + 2n \quad \Rightarrow \quad 3x - 2x = 2n - n \quad \Rightarrow \quad x = n$$

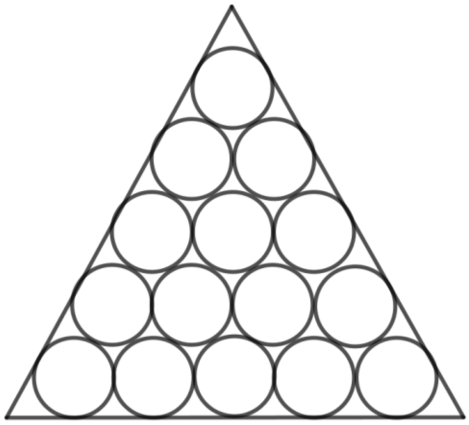
Como se demuestra, la edad del menor será siempre igual al número de años transcurridos.

Problema 02.- La vidriera

Se le ha encargado a Luis la construcción de una vidriera de forma triangular y que en su interior contenga 15 cristales circulares que se quieren que sean 5 de color azul, otros 5 de color verde y otros 5 de color rojo, pero con la condición de que nunca haya en contacto dos del mismo color, es decir, que dos del mismo color estén lo más separados posible.

Ayuda a Luis indicándole como debe distribuir en la vidriera los cristales de cada color.

¿Se podría realizar la distribución de los colores de distintas formas?, si fuera esto posible, ¿cuántas formas habría de hacerlo?



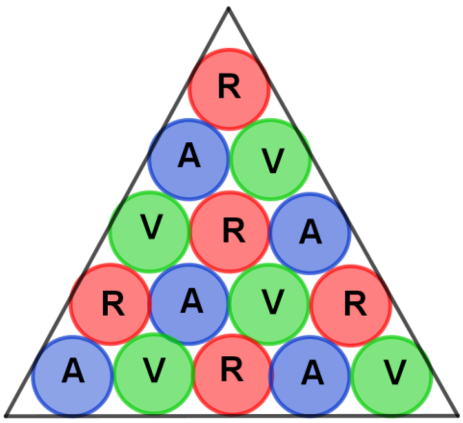
Solución

Empecemos a colorear por la izquierda de la base de la cristalera cristal azul, cristal verde, cristal rojo y nuevamente ponemos azul y a continuación verde.

Subimos a la siguiente fila de cristales y nuevamente empezamos por la izquierda poniendo en esta ocasión un cristal rojo, seguido de uno azul y otro verde finalizando la fila con el rojo nuevamente.

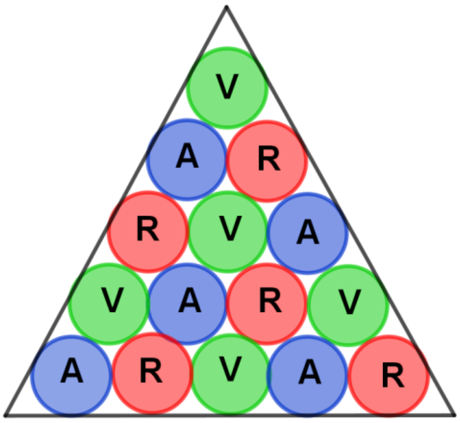
Continuemos con la fila central, a la izquierda debe ir un cristal verde, en el centro uno rojo y a la derecha uno azul.

Y para finalizar solamente nos queda las dos filas superiores, que irán de la siguiente forma, en la penúltima a la izquierda cristal azul y a la derecha cristal verde y en la última un cristal rojo.



También podríamos haber empezado en la base con el azul a la izquierda y a su derecha haber puesto el rojo y a continuación el verde, terminando la base con otro azul y uno rojo. En la fila superior a esta se empezaría a la izquierda con verde, seguido de un cristal azul, otro rojo y terminaríamos con otro verde.

En la línea central estaría a la izquierda el rojo, en el centro el verde y a la derecha el azul. En la fila encima de ella estaría a la izquierda el azul y a la derecha el rojo y en la fila superior de la cristalera se encontraría un cristal verde.



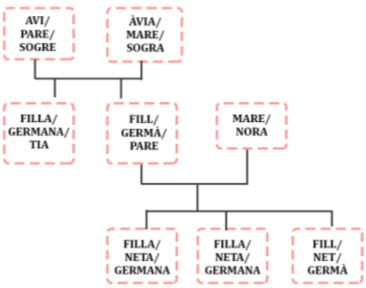
A la pregunta de que si se podría distribuir los cristales de colores de más formas distintas la respuesta es que sí, ya que se puede hacer un total de 6 combinaciones diferentes, porque para cada cristal de color con que empecemos hay 2 formas, y como podemos empezar con cualquiera de los 3 colores, el total sería $2 \cdot 3 = 6$ modelos distintos.

Problema 03. Comida Familiar

Durante una comida familiar hay un abuelo, una abuela, dos padres, dos madres, una tía, cinco hijos e hijas (dos hijos y tres hijas), tres nietos y nietas (dos nietas y un nieto), dos hermanos, tres hermanas,un suegro, una suegra y una nuera. ¿Cuántas personas han asistido a la comida familiar?

Solución

Debemos tener en cuenta que hay parentescos que pertenecen a una misma persona, por tanto, un árbol genealógico de la familia de la comida sería el siguiente:



A la vista del esquema, se deduce que a la comida familiar han asistido ocho personas, que completan los 23 parentescos del enunciado.

Avi→ Abuelo; *Àvia*→ Abuela; *Pare*→ Padre; *Mare*→ Madre; *Sogre*→ Suegro; *Sogra*→ Suegra; *Filla*→ Hija; *Fill*→ Hijo; *Germana*→ Hermana; *Germà*→ Hermano; *Tia*→ Tía; *Nora*→ Nuera; *Neta*→ Nieta; *Net*→ Nieto.

Problema 04. Los relojes

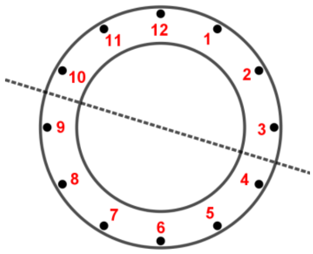
- **a)** ¿Cómo podemos dividir la esfera del reloj en dos partes de manera que la suma de cada parte, con la misma cantidad de números, sea igual?
- **b)** ¿Cómo podemos dividir otra esfera en tres partes con la misma cantidad de números, por medio de dos rectas, de manera que la suma de los números de cada parte sea igual?

Solución

Para poder dividir la esfera debemos saber cuánto suman todas las horas de la misma, que serán: $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$.

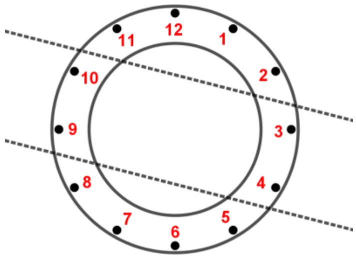
Para dar solución al primer apartado, al querer dividir la esfera en dos partes, cada una de ellas deberá sumar la mitad de 78, que son 39. Por lo tanto, debemos encontrar seis números, ya que nos dicen que las dos partes deben contener la misma cantidad, consecutivos que sumen 39.

$4+5+6+7+8+9=30$, y en consecuencia $10+11+12+1+2+3=39$. Por lo que la división de la esfera será:

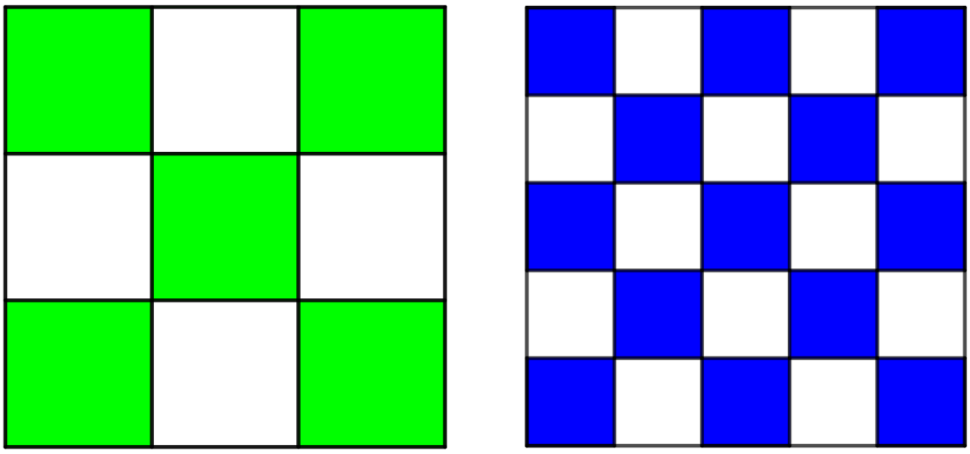


Para la segunda de las particiones que nos piden, cada una de ellas deberá sumar 26, ya que es la tercera parte de 78, y además nos piden que deban tener la misma cantidad de números al igual que antes. En consecuencia, buscamos ternas de cuatro números que sumen 26, y alguna de ellas deberán ser números consecutivos.

$5+6+7+8=26$, otros cuatro números serían los dos anteriores a 5, junto con los dos posteriores a 8, es decir $3+4+9+10$, y finalmente los números que nos restan, es decir, $1+2+11+12$.



Problema 05. Verdes o azules



¿Qué área es mayor, la verde o la azul?

Solución

Como los dos cuadrados son iguales, la parte verde del cuadrado supone las cinco novenas partes del mismo, mientras que la parte azul supondrá las trece vigésimo quintas partes del cuadrado.

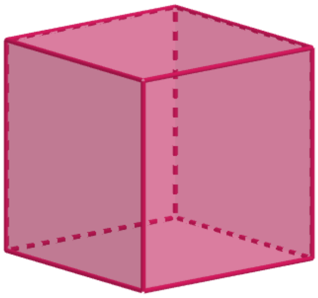
Vamos a comparar dichas fracciones, y para ello las escribiremos con el mismo denominador:

$$\frac{5}{9} \; ; \; \frac{13}{25} \Rightarrow \frac{125}{225} \; ; \; \frac{117}{225} \Rightarrow \frac{125}{225} > \frac{117}{225} \Rightarrow \frac{5}{9} > \frac{13}{25}$$

Por lo que el área de la parte verde es mayor que el área de la parte azul.

Problema 06. Un cubo especial

Encontrar un número que cumpla que el volumen del cubo de lado dicho número sea igual al área lateral total de dicho cubo.



Solución

Vamos a llamar a ese número *n*. Si el lado del cubo fuese *n*, el volumen del cubo sería n^3; y una de las caras del cubo tendría de área n^2. Sabemos que un cubo tiene seis caras, por lo que el área lateral del cubo sería $6 \cdot n^2$.

En consecuencia lo que estamos buscando es un número que cuando se multiplique tres veces por sí mismo, se obtenga seis veces el producto de dicho número por sí mismo.

$$n^3 = 6 \cdot n^2$$

Veamos en una tabla los posibles resultados para los primeros números naturales:

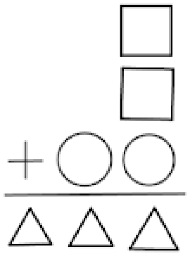
Número n	El cubo del número n^3	Seis veces el cuadrado $6 \cdot n^2$
1	1	6
2	8	24
3	27	54
4	64	96
5	125	150
6	216	216
7	343	294
…	…	…

El número que buscábamos era el 6.

Otra opción es observar la ecuación que se nos planteó $n^3 = 6 \cdot n^2$, por lo que para pasar de n^2 a n^3, bastará multiplicar por n, por lo que n debe ser necesariamente 6.

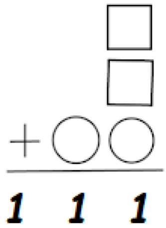
Problema 07. Cifras ocultas

Cada una de las figuras de la siguiente suma representa una cifra. ¿Cuál es el valor del cuadrado?

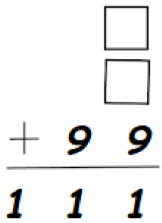


Solución

El triángulo ha de ser 1, pues no es posible que el resultado de la suma sea superior a 200 al tener solamente una cifra en las decenas del tercer número de la suma.



El círculo ha de ser 9, pues es la única opción para obtener como resultado 111, ya que si fuese menor que 9, por ejemplo 8, deberíamos llevarnos 3 de la suma de las unidades, pero nunca al sumar tres números menores de 9 se puede obtener más de 30.



De lo anterior se deduce que el valor del cuadrado ha de ser 6, y así obtenemos la suma.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ +\ 99 \\ \hline 111 \end{array}$$

Problema 08. 2021 cifras

Encuentra el menor número de 2021 cifras que cumple que la suma de todas sus cifras es 2021.

Solución

Si dividimos 2021 entre 9 obtenemos 224 de cociente y 4 de resto. Entonces el número buscado ha de comenzar con un 1, que es la menor de las cifras, y terminar con un 4 seguido de 224 nueves. La razón de dividir por 9 es porque queremos conseguir el menor número de cifras que sumen 2021, y esto se consigue con el mayor número de 9. Las cifras restantes serían ceros.

Por tanto el número que buscamos de 2021 cifras:

$$\mathbf{1}\ \overbrace{\mathbf{00000\cdots\cdots000}}^{\mathbf{1795}\ \boldsymbol{cifras}\ \mathbf{0}}\ \mathbf{4}\ \underbrace{\mathbf{99999\cdots\cdots999}}_{\mathbf{224}\ \boldsymbol{cifras}\ \mathbf{9}}$$

1º Ciclo E.S.O.

Problema 01. Regalando parcelas

Dª Carmen para gratificar la excelente labor desarrollada por Antonio y Benito, sus dos empleados, decide obsequiarle a cada uno de ellos con una parcela de su finca. Para ello le entrega a cada uno una cuerda muy larga pero de igual longitud para que con ella rodease el trozo de terreno que obtendría como regalo.

Antonio con su cuerda delimita una parcela con forma de triángulo equilátero cuya superficie una vez medida es de 200 m^2.

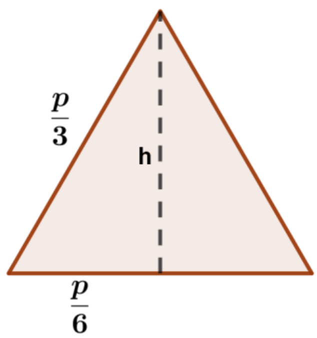
Benito, en cambio, decide formar con la suya un hexágono regular. ¿Qué superficie mide la parcela delimitada por Benito?

Pero ninguno de los dos empleados de Dª Carmen ha elegido al delimitar con la cuerda su parcela la forma geométrica con la cual hubiese obtenido la mayor superficie posible. ¿Cuál sería esta figura geométrica con la que se obtendría una parcela con el mayor tamaño posible?

Solución

Llamemos a la longitud de las cuerdas entregadas “p”.

Vamos a comenzar estudiando la parcela de Antonio de la que sabemos que tiene forma de triángulo equilátero, su superficie es de 200 m^2 y su perímetro es “p” (la longitud de la cuerda recibida) y por lo cual cada uno de sus lados miden "$\frac{p}{3}$".



Vamos a calcular cuál es su área en función del perímetro, para lo que necesitamos saber la medida de la altura del triángulo, que llamaremos “h”, también en función del perímetro y para ello si nos figamos en la figura del triángulo vemos que la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras.

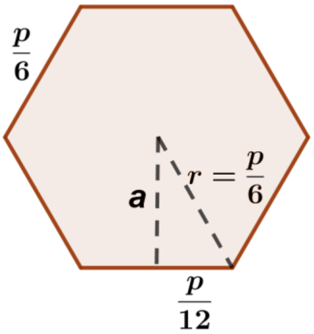
$$h^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^2 - \left(\frac{p}{6}\right)^2 = \frac{p^2}{9} - \frac{p^2}{36} = \frac{4p^2 - p^2}{36} = \frac{3p^2}{36} \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3p^2}{36}} = \frac{p\sqrt{3}}{6}$$

Sabemos que el área del triangulo es $200\,m^2$, ahora calculemos dicha el área en función del perímetro:

$$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{p}{3} \cdot \frac{p\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{36} = 200\,m^2$$

Pasemos a la parcela de Benito, de ésta sabemos que tiene forma de hexágono regular y que su perímetro es también "p" (la longitud de la cuerda recibida), por lo que sus lados y radios medirán "$\frac{p}{6}$".

Vamos a calcular cuál es su área en función del perímetro, para lo que necesitamos saber la medida de la apotema del hexágono regular, que llamaremos "a", también en función del perímetro y para ello si nos figamos en la figura del hexágono vemos que la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras.



$$a^2 = \left(\frac{p}{6}\right)^2 - \left(\frac{p}{12}\right)^2 = \frac{p^2}{36} - \frac{p^2}{144} = \frac{4p^2 - p^2}{144} = \frac{3p^2}{144} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{3p^2}{144}} = \frac{p\sqrt{3}}{12}$$

$$A_{hexágono\ regular} = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{p \cdot \frac{p\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{p^2\sqrt{3}}{24}$$

Relacionemos ambas áreas (triángulo equilátero y hexágono regular) mediante una regla de tres.

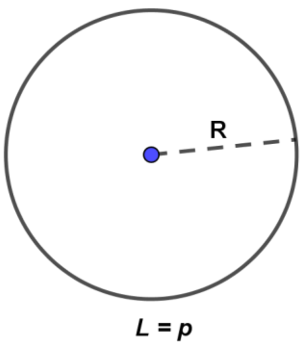
$$\frac{p^2\sqrt{3}}{36} \quad \rightarrow \quad 200\,m^2$$

$$\frac{p^2\sqrt{3}}{24} \quad \rightarrow \quad Superficie$$

$$Superficie = \frac{200 \cdot \frac{p^2\sqrt{3}}{24}}{\frac{p^2\sqrt{3}}{36}} = \frac{200 \cdot 36}{24} = 300\,m^2$$

La superficie de la parcela de Benito mide $300\,m^2$.

Pasemos a la segunda pregunta del problema, ni Antonio ni Benito al delimitar su parcela eligieron la figura geométrica con mayor superficie que se podía delimitar con la cuerda recibida, ¿cuál es esta figura?



Tendría que haber formado una circunferencia con la cuerda que le dieron y la superficie delimitada por ésta (el círculo) sería la parcela más extensa que se puede obtener, ya que en los polígonos con igual perímetro cuanto mayor sea el número de lados de éstos mayor superficie abarca y podríamos considerar a la circunferencia como un polígono con infinitos lados (cada uno de los infinitos puntos que la forman serían sus lados).

Comprobemos que el círculo tiene mayor superficie que el triángulo equilátero y el hexágono regular.

$$p = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{p}{2\pi}$$

$$A_{círculo} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi p^2}{4\pi^2} = \frac{p^2}{4\pi}$$

Relacionemos ahora las áreas del triángulo equilátero y el círculo mediante una regla de tres.

$$\frac{p^2\sqrt{3}}{36} \quad \to \quad 200\ m^2$$

$$\frac{p^2}{4\pi} \quad \to \quad Superficie$$

$$Superficie = \frac{200 \cdot \frac{p^2}{4\pi}}{\frac{p^2\sqrt{3}}{36}} = \frac{200 \cdot 36}{4\pi\sqrt{3}} = \frac{1800\sqrt{3}}{3\pi} = 600\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cong 330.8\ m^2$$

La figura geométrica que tendría mayor superficie con igual perímetro es el círculo.

Problema 02. Pirámides de pelotas

Se ha recibido en el Real Club de Tenis de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas un contenedor lleno de pelotas de tenis y a su Presidente se le ha ocurrido la idea de formar pirámides con dichas pelotas en las cuatro esquinas de la Pista Central del Club, para ello le ha hecho entrega de las mismas a sus cuatro recogepelotas.

Francisco ha formado en su esquina una pirámide de base cuadrada que contiene 15 pelotas en cada lado, José en la esquina opuesta ha construido una pirámide, igualmente de base cuadrada, con 10 pelotas por cada lado, Alejandro en su esquina formó la pirámide cuadrangular con 5 pelotas por lado y a Iván solo le quedó una pelota que colocó en su esquina.

¿Cuántas pelotas de tenis había en el contenedor recibido en el Real Club de Tenis?

Solución

Calculemos las pelotas que hay en las pirámides cuadrangulares que cada uno de los recogepelotas ha construido en las esquinas de la pista de tenis y luego sumémoslas.

Empecemos con Iván, en su esquina solo hay $1\ pelota$.

Alejandro ha formado en su esquina una pirámide de base cuadrada con 5 pelotas en cada lado, esta pirámide tiene 5 pisos, el inferior está formado por 25 pelotas (5·5), en el siguiente hay 16 pelotas (4·4), si seguimos subiendo nos encontramos con 9 pelotas (3·3), en el cuarto piso tenemos 4 pelotas (2·2) y en el superior solo hay 1 pelota. Alejandro ha utilizado un total de $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55\ pelotas$.

José en su esquina ha construido la pirámide cuadrangular con 10 pelotas en cada lado, que tiene 10 pisos de altura, siendo el número de pelotas en cada piso respectivamente $100\ (10^2),\ 81\ (9^2),\ 64\ (8^2),\ 49\ (7^2),\ 36\ (6^2),\ 25\ (5^2),\ 16\ (4^2),\ 9\ (3^2),\ 4\ (2^2)\ y\ 1\ (1^2)$; si sumamos todas estas cantidades nos resulta que el total de pelotas utilizadas por José es de $385\ pelotas$.

Francisco con las pelotas que cogió forma en su esquina una pirámide cuya base es un cuadrado con 15 pelotas en cada lado, siguiendo el mismo razonamiento que se ha utilizado en sus compañeros, las pelotas usadas en su construcción es el resultado de sumar los cuadrados de los 15 primeros números, $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + 144 + 169 + 196 + 225 = 1240\ pelotas$.

Por último calculamos el total de pelotas de tenis que había en el contenedor:

$$1 + 55 + 385 + 1240 = 1681\ pelotas\ de\ tenis$$

En el contenedor había un total de $\boldsymbol{1681\ pelotas\ de\ tenis}$.

Otra forma de poder calcular la suma de los “n” primeros cuadrados perfectos sería usando una de las siguientes expresiones:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n} = \boldsymbol{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Así tendríamos:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot (5+1)(10+1)}{6} = 55$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \frac{10 \cdot (10+1)(20+1)}{6} = 385$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 = \\ = \frac{15 \cdot (15+1)(30+1)}{6} = 1240$$

Problema 03. ¡Qué competición más reñida!

Cinco atletas participan en la fase final de una competición que consta de cinco pruebas individuales. En cada una de las cinco pruebas, el ganador consigue 5 puntos, el segundo 4, el tercero 3, etc. Nunca hay empates, ni en las pruebas individuales ni en la clasificación final.

Albert ha quedado ganador con un total de 24 puntos, el segundo clasificado ha sido Bernat, el tercero Carmel (que ha quedado en la misma posición en cuatro de las cinco pruebas), el cuarto clasificado ha sido Joan y por último Pere (a pesar de haber ganado en natación y haber sido tercero en la prueba de tiro).

¿En qué lugar ha quedado Joan en natación?

Solución

Comenzamos calculando los puntos que repartiremos entre todos los participantes. Puesto que las puntuaciones van a ser de 1 a 5 puntos, utilizamos la fórmula de Gauss para sumar rápidamente los cinco primeros números:

$$\frac{5 \cdot (5+1)}{2} = 15$$

Multiplicamos por 5 participantes, $15 \cdot 5 = 75$.

Por tanto, vamos a repartir 75 puntos, teniendo en cuenta las restricciones que nos da el enunciado, construimos la siguiente tabla:

	Natación	Tiro	3ª Prueba	4ª Prueba	5ª Prueba	Total
Albert	4	5	5	5	5	**24**
Bernat	1	4	2	4	4	**15**
Carmel	3	1	3	3	3	**13**
Joan	**2**	2	4	2	2	**12**
Pere	5	3	1	1	1	**11**
						75

En consecuencia, Joan ha quedado segundo en la competición de natación.

Problema 04. ¡Vaya, qué relojes!

Tengo dos relojes un poco estropeados. Uno se avanza 10 minutos cada hora, y el otro se retrasa 10 minutos, también cada hora. A pesar de esto, si los sincronizamos en un momento del día, es suficiente con un sencillo cálculo, saber la hora. En este momento uno de los relojes señala las 20:45 y el otro, las 16: 35. ¿A qué hora los sincronizamos y qué hora es?

Solución

Como que la proporción por hora de avanzarse y retrasarse en los dos relojes es la misma, la hora verdadera es la media aritmética de las dos horas:

$$H = \frac{20\,h\ \ 45\,\mathrm{m} + 16\,h\ \ 35\,m}{2} = 18\,h\ \ 40\,m$$

El reloj que se adelanta, se ha avanzado $20\,h\,45\,m - 18\,h\,40\,m = 2\,h\,5\,m$.

El reloj que se retrasa, se ha retrasado $18\,h\,40\,m - 16\,h\,35\,m = 2\,h\,5\,m$.

Cómo lo hacen 10 minutos por hora, desde el inicio han pasado,

$$\frac{2\,h\,5\,m}{10\,m/h} = \frac{125\,m}{10\,m/h} = 12{,}5\,h = 12\,h\,30\,m$$

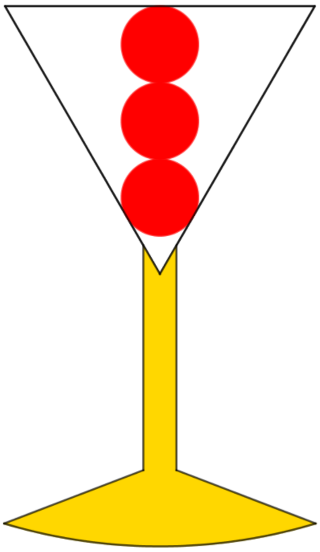
Por tanto, la hora en que ambos relojes se sincronizaron es:

$$18\,h\,40\,m - 12\,h\,30\,m = 6\,h\,10\,m$$

Problema 05. Tres guindas en una copa

En una copa cónica de sección triangular equilátera de lado 1 dm echamos tres guindas como las dibujadas resultando que la superior alcanza exactamente el tope de la copa.

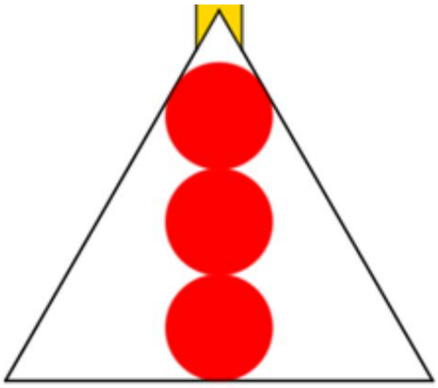
Determinar, suponiendo que las guindas son esféricas, el radio de las mismas.

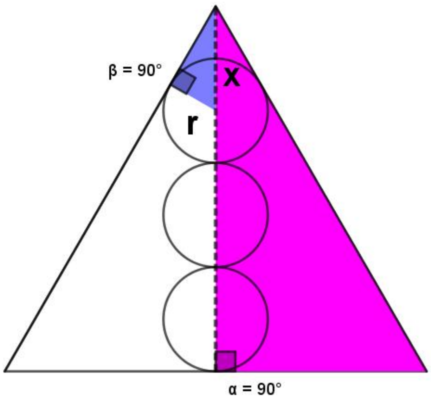


Solución

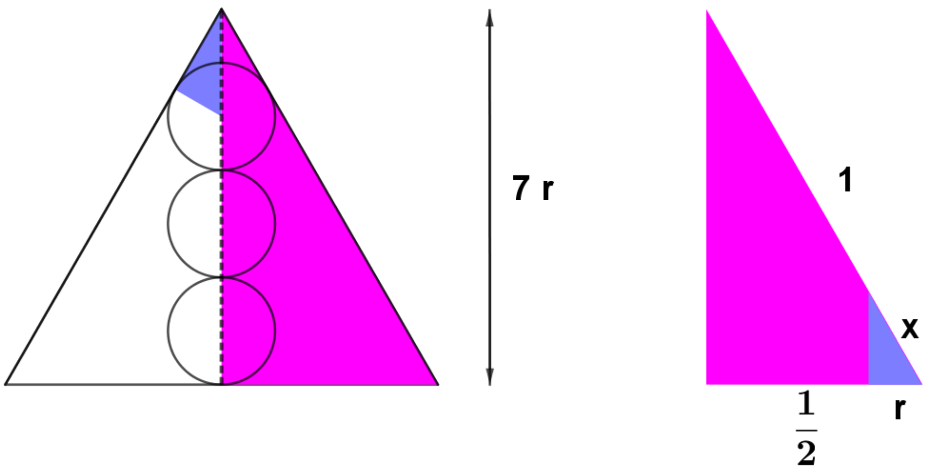
Invirtamos el triángulo equilátero y consideremos que la guinda que más al fondo de la copa está, se convertirá en la guinda superior.

Como se puede apreciar en la siguiente imagen, se pueden formar dos triángulos rectángulos que comparten los ángulos superiores y el de 90°, por lo que los tres ángulos son iguales y en consecuencia los triángulos son semejantes.





El triángulo azul pequeño tendrá un cateto que sería el radio de la guinda, que llamamos r, y la hipotenusa que llamamos x. Para el triángulo rosa, el cateto que correspondería a r sería la base que mide 0.5 dm, y la hipotenusa 1 dm.



Por tanto la razón de proporcionalidad es:

$$\frac{x}{r} = \frac{1}{1/2} \quad \Rightarrow \quad x = 2r$$

Por lo que la altura del triángulo es siete veces el radio de la guida: $x + 5r = 7r$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rosa tendremos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (7r)^2 = 1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} + 49\,r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 49\,r^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{3}{196}$$

$$r = \sqrt{\frac{3}{196}} = \frac{\sqrt{3}}{14} \cong 0{,}1237 \text{ dm}$$

Las guindas tendrán un radio de 1,137 dm, es decir 2,474 dm de diámetro.

Problema 06. Combinamos múltiplos y divisores

De dos números conocemos su máximo común divisor que es 12, y su mínimo común múltiplo que es 432. Encontrar dichos números.

Solución

Llamemos a los dos números que estamos buscando *a* y *b*. Al tener ambos el máximo común divisor 12, ambos números deben ser múltiplos de 12, por lo que existirán otros nuevos números que vamos a llamar en esta ocasión *m* y *n*, donde se tiene que cumplir que:

$$\begin{cases} a = 12 \cdot m \\ b = 12 \cdot n \end{cases}$$

Además, el mínimo común múltiplo de a y b debe ser 432, por lo que:

$$432 = 12 \cdot m \cdot n \quad \Rightarrow \quad m \cdot n = 36$$

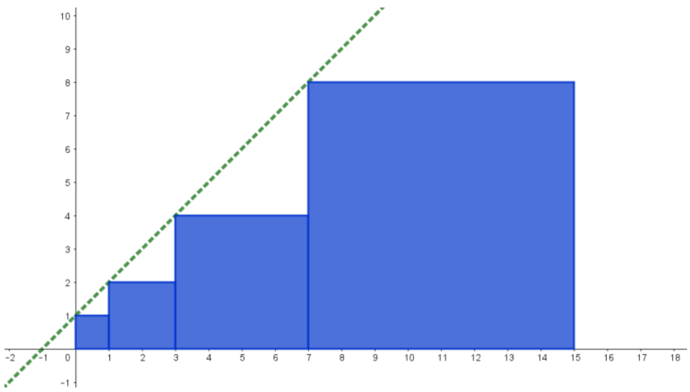
Ahora estamos buscando dos números m y n que cumplan que su producto sea 36.

m	n	$a = 12 \cdot m$	$b = 12 \cdot n$	
1	36	**12**	**432**	Cumplen las condiciones
2	18	24	216	El M.C.D es 24
3	12	36	144	El M.C.D es 36
4	9	**48**	**108**	Cumplen las condiciones
6	6	72	72	El M.C.D. es 72

Por tanto, hemos encontrado dos soluciones, los números serán 12 y 432; o también podrían ser 48 y 108.

Problema 07. Cuadrados "a la sombra"

Colocamos cuadrados consecutivos "a la sombra" de una recta, tal y como se ve en la siguiente imagen:



¿Cuáles serán las coordenadas de los vértices del siguiente cuadrado? ¿Y las de los vértices del 10º cuadrado?

Solución

En la imagen se ve claramente que la medida del lado de cada cuadrado es el doble del anterior. Por ello el lado del siguiente cuadrado medirá 16 unidades, siendo las coordenadas de los vértices las siguientes: (15, 0), (31, 0), (15, 16), (31, 16).

Para encontrar los vértices del 10º cuadrado, hemos de fijarnos en la secuencia que siguen los valores de la x de los vértices izquierdos de cada cuadrado: 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63…

Son las potencias de 2 menos una unidad. Es decir, la coordenada x del cuadrado n-ésimo será igual a $2^{n-1}-1$. Teniendo en cuenta además que el lado del cuadrado 10º será igual a 2^9, tendremos que los vértices buscados serían:

$(2^9-1 , 0)$; $(2^{10}-1 , 0)$; $(2^9-1 , 2^9)$ y $(2^{10}-1 , 2^9)$ $\Rightarrow$ (511, 0), (1023, 0), (511, 512), (1023, 512)

Problema 08. Una carrera incierta

Sara y Andrea disputan una carrera de 100 metros y Andrea gana con una ventaja de 5 metros sobre su amiga. Deciden repetirla pero esta vez Andrea va a dar ventaja a Sara y saldrá desde 5 metros más atrás que su contrincante. Suponiendo que ambas corran a la misma velocidad que en la carrera anterior, ¿quién ganará en esta ocasión? ¿Cuál será la ventaja de la ganadora sobre su amiga?

Solución

Teniendo en cuenta los resultados de la primera carrera, podemos decir que la velocidad de Sara es el 95% de la de Andrea (en el mismo tiempo que una recorre 100 metros, la otra recorre 95).

Esta es la situación cuando acaba la primera carrera

Para saber quién gana la segunda carrera veamos la situación en la que se encuentran cuando Andrea haya recorrido 100 metros y Sara 95 metros, al igual que en la primera carrera.

Al recorrer Andrea los 100 metros, estará empatada con Sara y a cinco metros de la meta cada una, por lo que la carrera la ganará nuevamente Andrea.

Teniendo en cuenta que la velocidad de Sara es el 95% de la de su rival Andrea. Andrea ganará al recorrer los 105 metros que tiene en esta segunda ocasión hasta la meta, mientras que Sara recorrerá el 95 % de la distancia que ha recorrido Andrea.

$$95\% \text{ de } 105 = 0{,}95 \cdot 105 = 99{,}75 \text{ metros}$$

Entonces la vencedora sería de nuevo Andrea, por una distancia de 25 centímetros.

2º Ciclo E.S.O.

Problema 01. El refuerzo escolar

Para reforzar el nivel académico de un centro educativo formado por 320 alumnos, se ha decidido dar clases de apoyo a los alumnos que lo necesiten de las asignaturas de matemáticas, lengua e inglés.

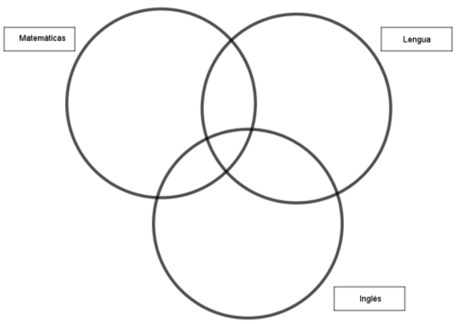
La información que ha recopilado el centro es la siguiente:

- 19 alumnos precisan apoyo en lengua e inglés solamente.
- De los alumnos que necesitan apoyo, hay 60 que no necesitan apoyo en inglés.
- 23 alumnos precisan apoyo en matemáticas, lengua e inglés.
- 65 alumnos precisan apoyo en inglés.
- De los 92 alumnos que necesitan apoyo en lengua, 13 de ellos no lo necesitan ni en matemáticas ni en inglés.
- Hay dos alumnos que necesitan solo apoyo en inglés de los que solo necesitan apoyo en matemáticas.

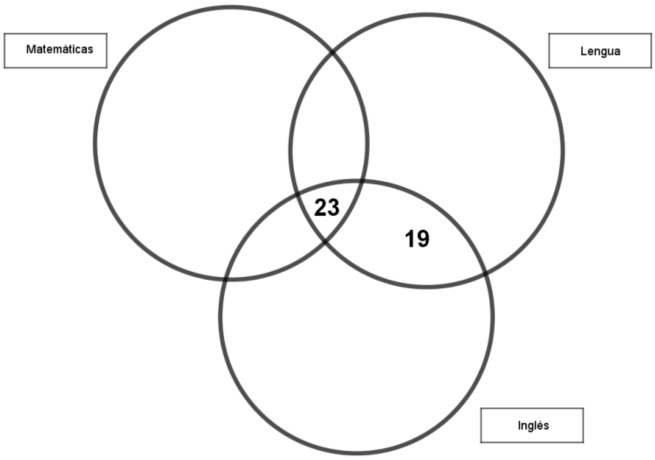
Con estos datos podrías indicar, ¿cuántos alumnos de este instituto no tendrán que ir a refuerzo?

Solución

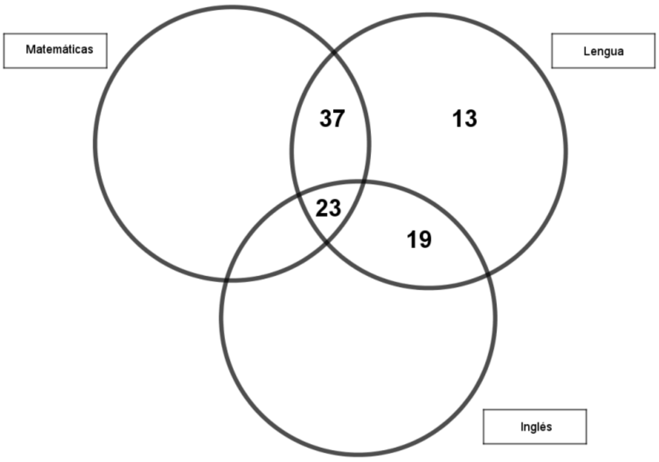
Para entender mejor la información que nos dan la presentaremos en el siguiente diagrama que iremos completando con los datos que nos dan en el enunciado tomando cada uno de estos datos en el orden adecuado.



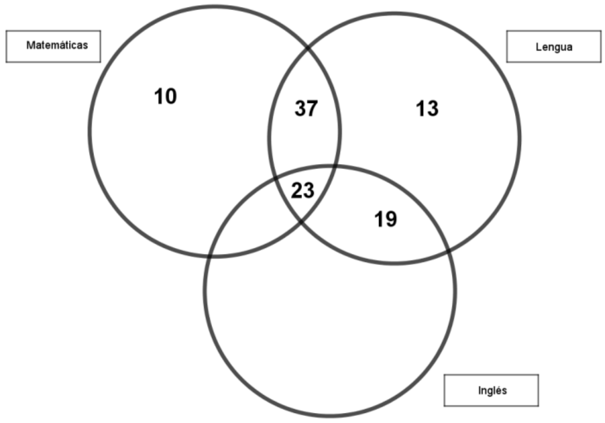
Comenzamos con la intersección de los tres conjuntos, es decir los alumnos que precisan apoyo en las tres materias, 23. También consideraremos el dato de que 19 alumnos precisan apoyo solo en lengua e inglés.



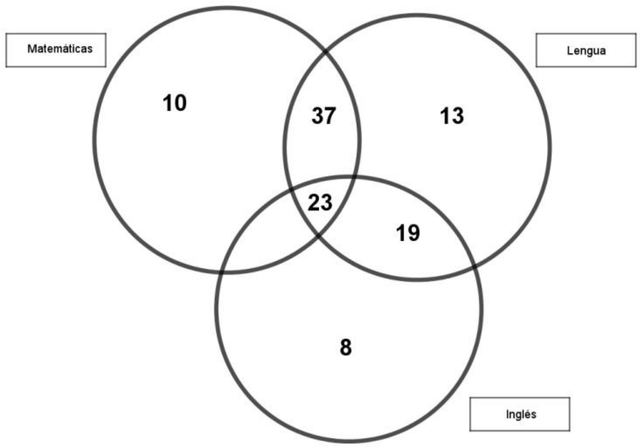
La quinta de las información nos hace permite sabes cuántos alumnos necesitan apoyo solo en lengua, que son 13 y además apoyo en matemáticas y lengua a la vez, sin necesitar apoyo en inglés, que serían 92 – 23 – 13 – 19 = 37.



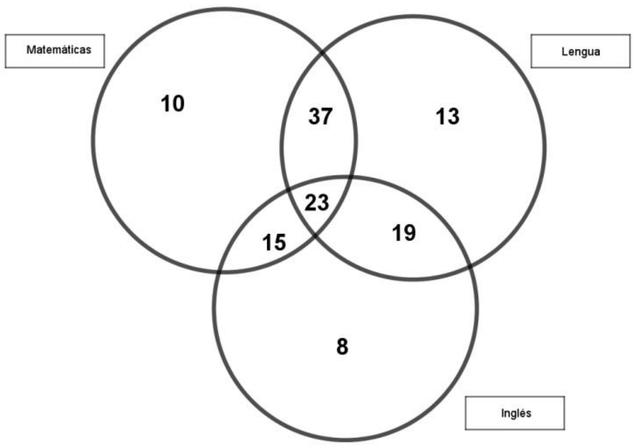
El dato de que entre todos los alumnos que necesitan apoyo, hay 60 que no necesitan apoyo en inglés, nos permite calcular aquellos alumnos que solo necesitan apoyo en matemáticas: 60 – 37 – 13 = 10.



El siguiente dato que vamos a considerar es que hay dos alumnos menos que necesiten ayuda solo en inglés, de los que necesitan solo apoyo en matemáticas.



Para finalizar, como nos dicen que 65 alumnos precisan apoyo en inglés, restaremos los alumnos que ya hemos contabilizado y obtendremos aquellos que necesitan ayuda en inglés y matemáticas solamente. 65 – 8 – 19 – 23 = 15.



Todos los que reciben algún tipo de apoyo son:

$$10 + 15 + 8 + 19 + 13 + 37 + 23 = 125.$$

Por tanto, los alumnos que no necesitarán refuerzo son: 320 – 125 = 195 alumnos.

Problema 02. La casa de Lucas

Lucas, Jaime, Loles y Estrella son compañeros de clase y comparten entre ellos la pasión por las matemáticas. Deciden quedar en casa de Lucas para realizar un trabajo, pero Lucas, para poner a prueba a sus compañeros les plantea el siguiente acertijo:

Vivo en una calle llamada Olvido, que tiene solo tres casas. Es una calle muy peculiar, ya que los números de las viviendas están en progresión aritmética y cuya suma es 15, pero si estos números se aumentan en 2, 1 y 3 respectivamente, los números resultantes están en progresión geométrica. Lucas se da cuenta de que hay dos soluciones posibles, por eso les comenta que el número de su casa es el mismo en ambas situaciones.

¿Sabrías decirnos, cuáles son los números de las tres casas y en cuál de ellas vive Lucas?

Solución

Llamamos a_1, a_2, a_3 a los números de las casas, que al estar en progresión aritmética:

a_1
$a_2 = a_1 + d$
$a_3 = a_1 + 2d$

Sabemos que la suma es 15:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 15 \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 15 \Rightarrow$$

$$3a_1 + 3d = 15 \Rightarrow a_1 + d = 5 \Rightarrow a_1 = 5 - d$$

Por lo tanto, sustituyendo a_1 en los demás términos:

$a_1 = 5 - d$
$a_2 = 5 - d + d = 5$
$a_3 = 5 - d + 2d = 5 + d$

Por otra parte, sabemos que los términos de la progresión geométrica serían:

$b_1 = a_1 + 2 = 5 - d + 2 = 7 - d$
$b_2 = a_2 + 1 = 5 + 1 = 6$
$b_3 = a_3 + 3 = 5 + d + 3 = 8 + d$

Sabemos que en una progresión geométrica:

$$r = \frac{b_3}{b_2}$$
$$r = \frac{b_2}{b_1}$$

Igualando ambas expresiones: $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1}$

Expresando esta igualdad en función de los términos de la progresión aritmética:

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_2}{b_1} \qquad \frac{8+d}{6} = \frac{6}{7-d}$$

Operando:

$$(8+d)\cdot(7-d\,) = 36$$

$$56 - 8d + 7d - d^2 \ = 36$$

$$-d^2 \ - d + 20 = 0$$

$$d^2 \ + d - 20 = 0$$

$$d = \frac{-1 \ \pm \sqrt{1+4\cdot 20}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1+9}{2} = \begin{cases} 4 \\ -5 \end{cases}$$

- Para $d = \ 4$, sustituimos su valor en las expresiones anteriores:
  a_1 = 5 – d = 5 – 4 = 1
  a_2 = 5
  a_3 = 5 + d = 5 + 4 = 9

  Los números de las casas son: 1, 5 y 9

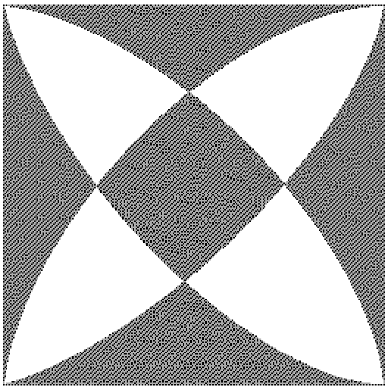
- Para d= -5, sustituyo igual que en el caso anterior:
  a_1 = 5 – d = 5 – (-5) = 10
  a_2 = 5
  a_3 = 5 + d = 5 + (-5) = 0

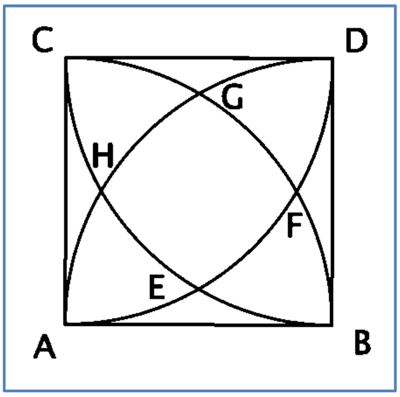
  Los números de las casas son: 10, 5 y 0

Cómo afirma Lucas que el número de su casa es el mismo en ambas situaciones, Lucas vive en la casa número 5 y los otras dos casas tienen el número 1 y el 9, ya que las calles no tienen número 0.

Problema 03. Cuadrados y arcos

En este cuadrado de 10 cm de lado, se han trazado arcos de circunferencia con centro en cada uno de los vértices.Calcula el área sombreada.

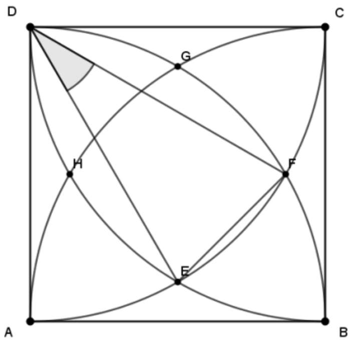




Solución

Dado el cuadrado de lado c de la figura, para calcular el área sombreada queplantea el problema, le restaremos al área del cuadrado, el área de los cuatrotriángulos curvilíneos AHE, BEF, CFG y DGH.

El ángulo EDF= 30° porque:



- El triángulo EDC es equilátero de lado c, puesto que los arcos DHE y CFE hansido trazados, respectivamente, con centros C y D, y con radio c.

- El ángulo EDC=60°, el ángulo ECD=60° y el ángulo BCE=30°
- Por el mismo razonamiento, el triángulo ADF es equilátero de lado c, el ángulo ADF=60° y el ángulo FDC=30°.
- Como EDC=60° y FDC=30°, entonces el ángulo EDF=30°.

  La longitud del segmento EF es $c\sqrt{2-\sqrt{3}}$
- Si M es el punto medio del segmento EF y como el ángulo EDF=30°, entonces el ángulo EDM=15°.
- Como ED=c, entonces EM = $c \cdot \text{sen}(15°)$, por tanto,

EF = 2 ·c · sen (15°) = $2c\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = c\sqrt{2-\sqrt{3}}$

El triángulo BEF es equilátero, porqué

- Los triángulos EDF y ECB son iguales, ja que ED=DF=EC=BC=c y EDF=BCE=30°,por tanto EF=EB.
- Razonando de la misma manera, como los triángulos EDF y BAF son iguales,entonces EF=BF.

Como el triángulo rectilíneo BEF es equilátero, el área de BEF es

$$\frac{\sqrt{3}}{4}EF^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot c^2 \cdot \left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^2 - \frac{3}{4}\cdot c^2$$

El área del segmento circular EF es $\frac{\pi}{12}\cdot c^2 - \frac{1}{4}\cdot c^2$:

- Como el ángulo EDF=30°, el área del sector circular EDF es $\frac{\pi}{12}\cdot c^2 = \frac{1}{12}\cdot c^2$
- Como el triángulo EDF es igual al triángulo FDC, (la base del cual es c y la alturac/2), el área del triángulo EDF es $\frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{c}{2} = \frac{1}{4}\cdot c^2$
- Por tanto, el área del segmento circular EF es $\frac{\pi}{12}\cdot c^2 - \frac{1}{4}\cdot c^2$.

El área del triángulo curvilíneo BEF es igual al área del triángulo rectilíneo BEF másel área del segmento circular BF: los triángulos (y sectores circulares) EDF, ECB y BAF son iguales y, por tanto, los segmentos circulares EF, EB y BF son iguales; cómopodemosobservar, si al triángulo rectilíneo BEF le quitamos el segmento circular EF y le añadimos lossegmentos circulares EB y BF, se obtiene el triángulo curvilíneo BEF.

El área del triángulo curvilíneo BEF será:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^2 - \frac{3}{4}\cdot c^2\right) + \left(\frac{\pi}{12}\cdot c^2 - \frac{1}{4}\cdot c^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^2 + \frac{\pi}{12}\cdot c^2 - c^2$$

El área sombreada será, finalmente:

$$c^2 - 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c^2 + \frac{\pi}{12}\cdot c^2 - c^2\right) = c^2 - 2\sqrt{3}\cdot c^2 - \frac{\pi}{3}\cdot c^2 + 4\cdot c^2$$
$$= 5\cdot c^2 - 2\sqrt{3}\cdot c^2 - \frac{\pi}{3}\cdot c^2 = c^2\cdot\left(5 - 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Por tanto, si el lado del cuadrado es 10 cm, obtenemos que el área sombreada es, aproximadamente, 48.87 cm².

Problema 04. El billete de metro

Al subir al metro me he dado cuenta que el número del billete era bastante curioso. Era capicúa, y al sumar sus cinco cifras, daba el mismo resultado que si las multiplicaba. Por otro lado, la primera cifra de la izquierda daba la edad de la más pequeña de mis hermanas, las dos siguientes daban la edad de la mediana, y las dos últimas daban la edad de la mayor (que le lleva más de un año a la mediana). ¿Qué numeración llevaba el billete?

Solución

Sea *abcba* el número del billete.

Por las condiciones del enunciado, se cumple:

$$2a + 2b + c = a^2 \cdot b^2 \cdot c$$

Por otro lado, tiene se debe cumplir que:

$$a < bc < ba$$

La edad de la pequeña no puede ser de 1 año, ya que si así lo fuera la edad de la mediana bc, obligaría a que la edad de la mediana fuera de 10 años y la de la mayor de 11, o de 20 para la mediana y 21 años, que en ningún caso cumplieran las condiciones de enunciado.

Tampoco podría ser la edad de la pequeña de 2 años, ya que en ese caso la mediana tendría 10 u 11 años y la mayor 12 o 22, que tampoco nos llevaría a ninguna solución que cumplieran las condiciones.

Para una edad de 3 años para la pequeña, tendríamos que una solución válida sería la de 11 años para la mediana y 13 para la mayor, cumpliéndose la primera de las condiciones:

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 = 3^2 \cdot 1^2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 6 + 2 + 1 = 9 \cdot 1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad 9 = 9$$

Es decir, el número buscado es 31113.

Problema 05. Jugando con tres letras

Se disponen de una infinidad de fichas con las letras **M**; **I**; y **U** y partimos de la palabra inicial **MI**. Haciendo uso únicamente de las cuatro siguientes reglas, ¿se puede conseguir las palabras **MU**?, ¿y la palabra **UIM**?

<u>Regla I</u>: Supongamos que se tenga **Mxy**. En tal caso, puede agregarse **Mxxy** a la colección, donde **x** representa cualquier fragmento de cadena. Ejemplo: **MUIU** → **MUIUIU**

<u>Regla II</u>: Si se tiene una cadena cuya última letra sea **I**, entonces se le puede agregar una **U** al final. Ejemplo: **MUI** → **MUIU**

<u>Regla III</u>: Si aparece **UU** en el interior de una de las cadenas, está permitida su eliminación. Ejemplo: **MUUI** → **MI**

Regla IV: Si en una de las cadenas de la colección aparece la secuencia **III**, puede elaborarse una nueva cadena sustituyendo **III** por **U**. Ejemplo: **MIIIUI** → **MUUI**

Finalmente, si en la Regla I no se permite duplicar cualquier fragmento de cadena tras la letra **M** y se tuviera que repetir toda la secuencia que siga a la **M**. (Ejemplo **MUIU** → **MUIUUIU**), ¿Podría encontrar la trasformación de **MI** a **MU**?

Solución

Para responder vamos a utilizar todas las reglas del juego. Comenzamos por la palabra

MI

Con la regla 2, que nos permitirá añadir la letra U:

MIU

Según la regla 1, podemos añadir la letra I entre medias, ya que M-I-U nos lo permitirá:

MIIU

Volviendo a aplicar esta regla, la regla 1, M-I-IU, permitirá añadir la letra I

MIIIU

La regla 4 nos permitirá sustituir esas III por una U:

MUU

Volviendo a la regla 1, la U final M-U-U central la repetiremos obteniendo:

MUUU

Finalmente, la regla 3 nos permitirá eliminar la doble U central M-UU-U y obtendríamos MU, que es lo deseado.

MU

Lo hemos conseguido. La secuencia será:

MI → MIU → MIIU → MIIIU → MUU → MUUU → MU

Para concluir si la Regla I no nos permitiera duplicar cualquier fragmento de cadena tras la letra **M**, estaríamos ante el conocido **Teorema de MU**, también conocido como rompecabezas MU o como Acertijo de MU, de Douglas Richard Hofstadter, nacido en Nueva York en 1945.

Su obra "*Gödel, Escher, Bach*" (1979) se convirtió al poco de su aparición en un espectacular éxito en Estados Unidos, antes incluso de recibir el prestigioso Premio Pulitzer y el American Book Award en 1980.

Hofstadter ideó este acertijo con el objetivo de hacer una pequeña introducción a los sistemas formales, pero ya de paso lo aprovechó como ejemplo bastante consistente de lo que diferencia a los seres humanos de las máquinas y nos da una idea del tipo de problemas que debería ser capaz de resolver una máquina para considerarla tan inteligente como los seres humanos.

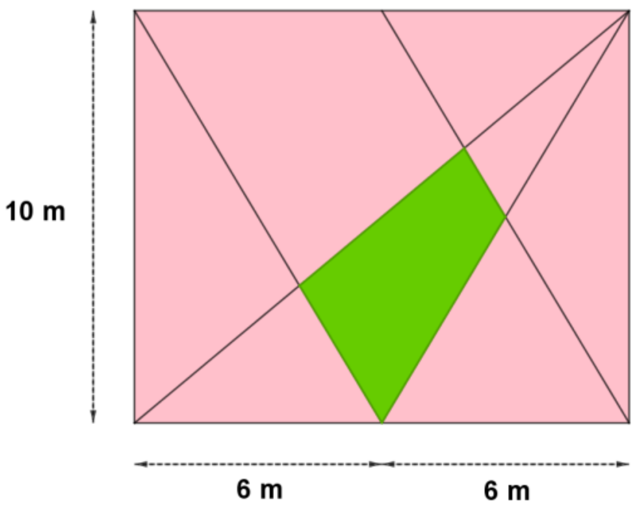
Si nos ponemos a intentar convertir **MI** en **MU** nos encontraremos con una cadena en la que la **I** no desaparecería nunca. Nunca son múltiplo de 3, para poder usar la Regla IV. La Regla IV elimina múltiplos de tres, que no los produce. Sólo la Regla I (la nueva versión, y original de Hofstadter), incrementa el número de **I**, pero siempre serán potencias de 2. Por tanto, nunca producirá un múltiplo de tres salvo que ya lo hubiese al principio. Pero al principio hay una sola **I** que no es múltiplo de 3, por lo que no podremos llegar a **MU**.

https://es.wikipedia.org/wiki/Rompecabezas_MU

https://da8y01.github.io/gh-blog/2016/03/10/godel-escher-bach.html

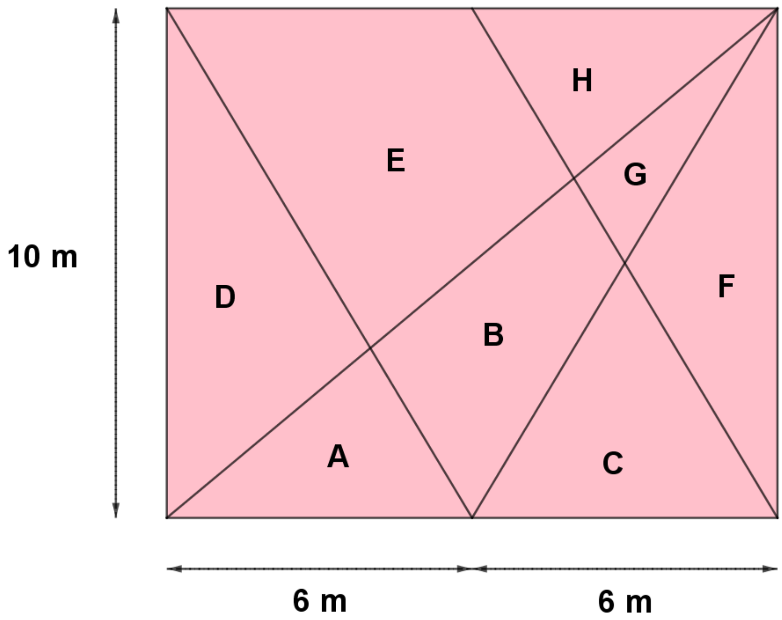
Problema 06. El jardín de Carlos.

En el patio de Carlos que tiene dimensiones 12 x 6 m, se ha construido el siguiente jardín marcado de color verde. Hallar el área del jardín de Carlos.



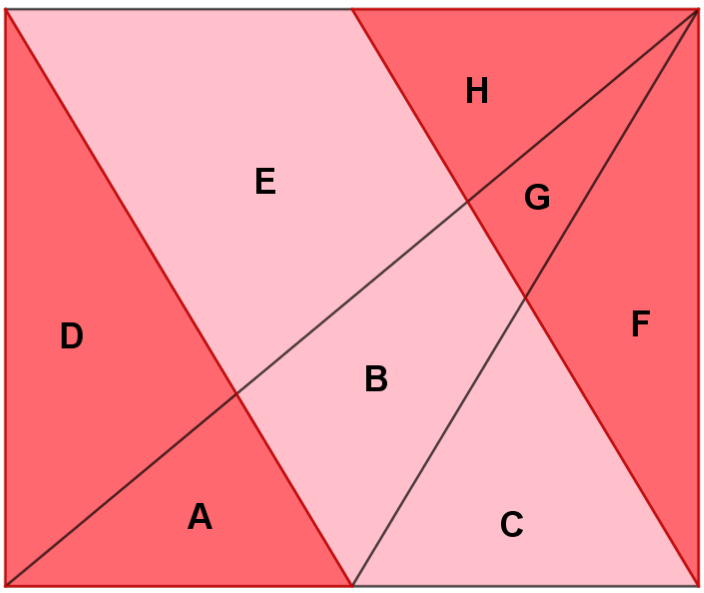
Solución

Pongamos nombre a cada uno de los polígonos en los que hemos dividido el rectángulo de la figura.

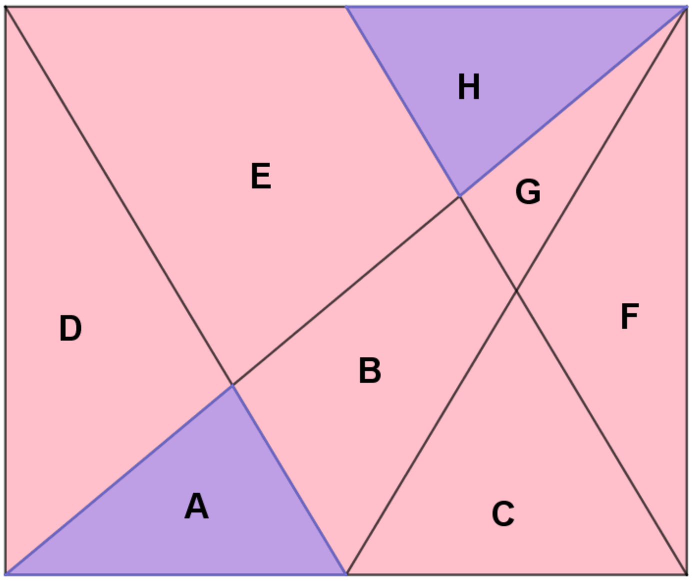


Pongamos nombre a cada uno de los vértices en los que se ha dividido la figura, y razonemos los valores de algunas de las áreas.

El triángulo formado por los triángulos A y D tiene por área 30 m^2, y también el triángulo que forman los tres triángulos H, G y F, ambos tienen por base 6 m y altura 10 m.

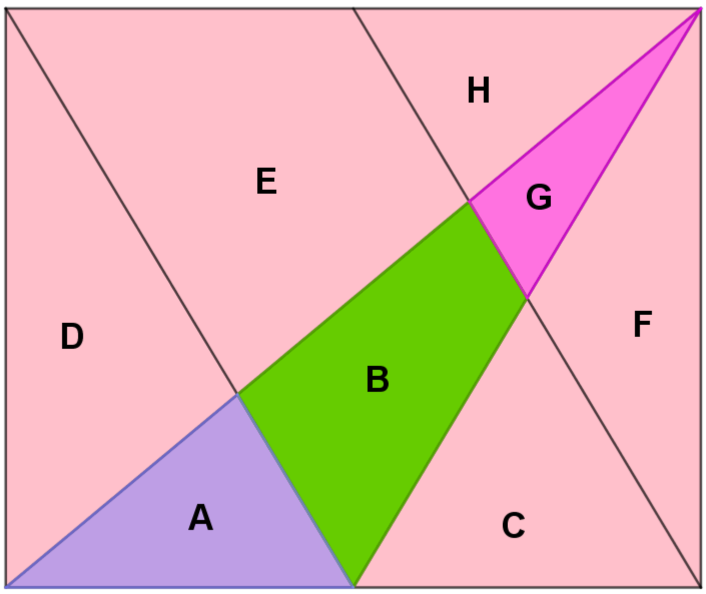


Los triángulos A y H tienen la misma área, ambos comparten la misma base y los tres ángulos al ser las hipotenusas de los triángulos rectángulos mencionados anteriormente paralelas, y uno los otros dos lados forman parte de la diagonal del rectángulo.



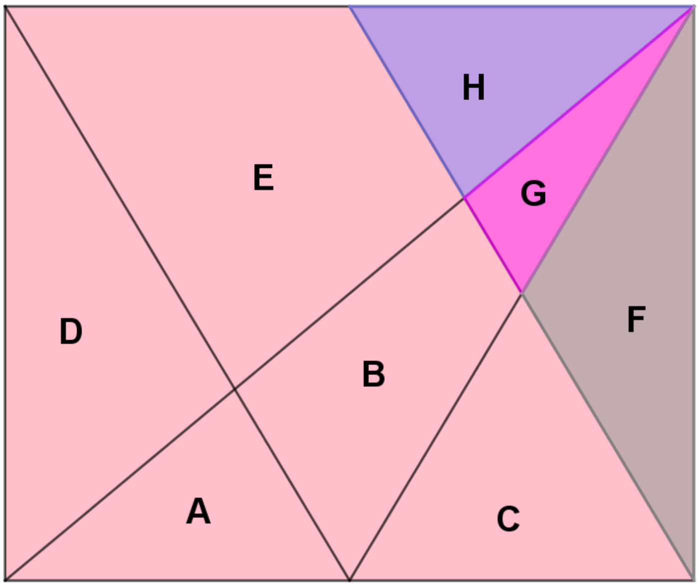
El área pedida es la del cuadrilátero B, la podemos conseguir del triángulo formado por A, B y G, que es de 30 m^2 menos las áreas de los triángulos A y G.

$$Área_B = 30 - Área_A - Área_G$$



Por otra parte el área del triángulo G es igual al del triángulo formado por H, G y F, que también es de 30 m^2 menos las áreas de los triángulos H y F.

$$Área_G = 30 - Área_F - Área_H$$



Uniendo ambos resultados tendremos que:

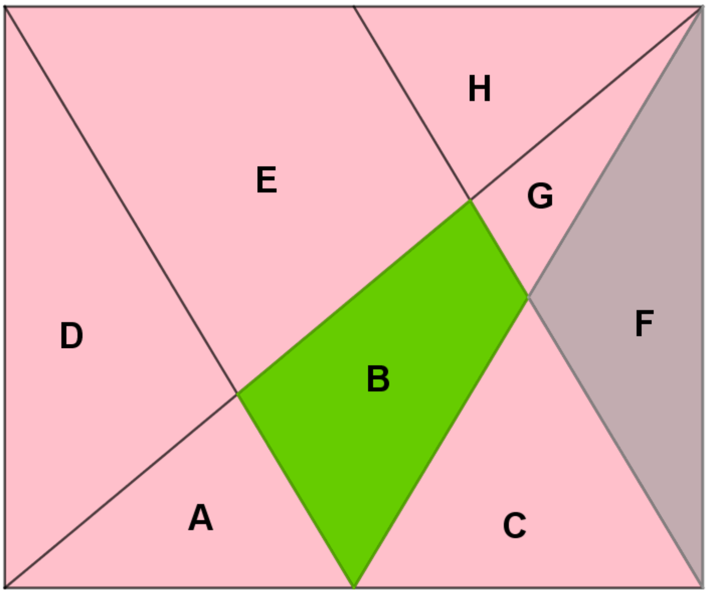
$$\acute{A}rea_B = 30 - \acute{A}rea_A - \acute{A}rea_G = 30 - \acute{A}rea_A - (30 - \acute{A}rea_F - \acute{A}rea_H)$$

Al ser las áreas de los triángulos A y H iguales tendremos:

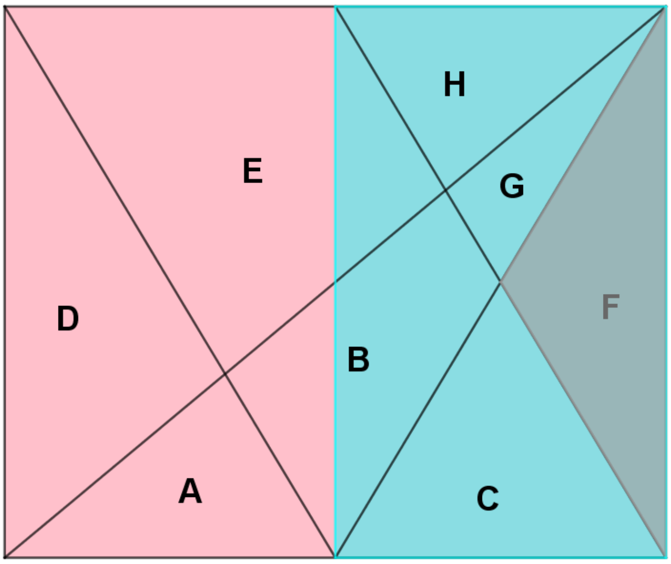
$$\acute{A}rea_B = 30 - \acute{A}rea_A - (30 - \acute{A}rea_F - \acute{A}rea_A) = 30 - \acute{A}rea_A - 30 + \acute{A}rea_F + \acute{A}rea_A$$

Lo cual nos lleva a concluir que:

$$\acute{A}rea_B = \acute{A}rea_F$$



Para hallar el área del triángulo F bastará con observar que tiene por base 10 m y por altura 3 m, al estar formado por las diagonales del rectángulo que se marca en figura. Por tanto, el área del cuadrilátero pedido será 15 m^2.



Problema 07. Un número enorme

Una profesora escribe un número muy grande en la pizarra y pide a sus 30 alumnos que digan, uno a uno, distintos divisores de ese número. Los alumnos contestan consecutivamente: el primero dice "el 1 es divisor de ese número", el segundo dice que "el 2 es divisor", el tercero dice que "el 3 es divisor", el cuarto que "el 4 es divisor", y así sucesivamente hasta que el trigésimo alumno dice que "el 30 también es divisor".

La profesora les dice que sólo dos alumnos se equivocaron y que, además, lo hicieron de forma consecutiva. ¿Cuáles fueron los alumnos que se equivocaron? ¿Cuál es el menor número que pudo escribir la profesora?

Solución

El número *N* que buscamos es divisible por todos los números de 1 a 30 salvo dos que han de ser consecutivos. Para encontrar estos números hemos de tener en cuenta lo siguiente:

- Ambos han de ser mayores de 15, pues de no serlo, el número tampoco sería divisible por su doble, lo cual contradice el enunciado.
- En sus descomposiciones factoriales sólo puede haber un número primo pues si *N* no es divisible por un número *a* con $a = x^k \cdot y^m$ (*x* e *y* primos), se tendría inmediatamente que *N* no podría ser divisible por x^k o por y^m. (Por ejemplo, si *N* no es divisible por 28, se tendría inmediatamente que o no lo es por 7 o por 4, lo cual iría en contra del enunciado).

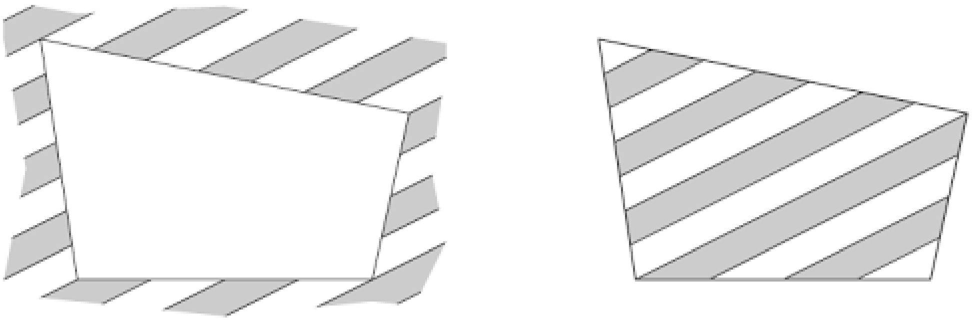
El razonamiento previo nos lleva a que los números buscados han de ser consecutivos y primos o potencias de primos. Los únicos números entre 15 y 30 que cumplen estas condiciones son 16 y 17.

El menos número que podría haber escrito la profesora es el producto de las mayores potencias de primos entre 1 y 30 (sin el 16 y el 17):

$$N = 29 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7 = 68.502.634.200$$

Problema 08. Papel de regalo

Recortamos un cuadrilátero de un papel de regalo decorado con bandas grises y blancas del mismo ancho. Si las bandas grises tienen una superficie de 80 cm^2, ¿cuál será la superficie total del cuadrilátero?



Solución

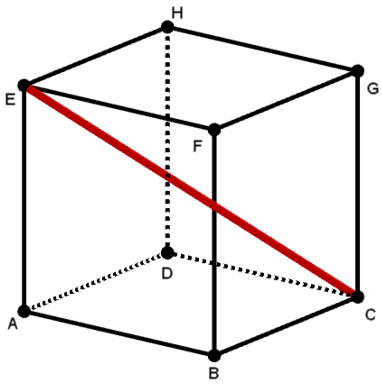
Si nos fijamos en la figura vemos que todas las bandas son trapecios de la misma altura (podemos considerar, a efectos de cálculo de área, los triángulos de las esquinas como trapecios con base menor igual a cero). Entonces la relación entre las áreas blanca y gris será la misma que la existente entre las longitudes de las bases que delimitan las bandas grises y blancas.

Dado que cada línea es a su vez base de un trapecio gris y uno blanco, deducimos que el área gris es igual al área blanca, es decir, 80 cm^2. En consecuencia el área total del cuadrilátero será de 160 cm^2.

Bachillerato

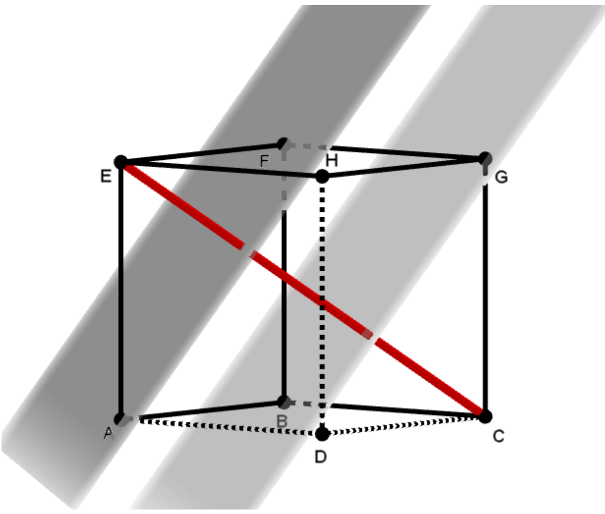
Problema 01. Diagonal del cubo

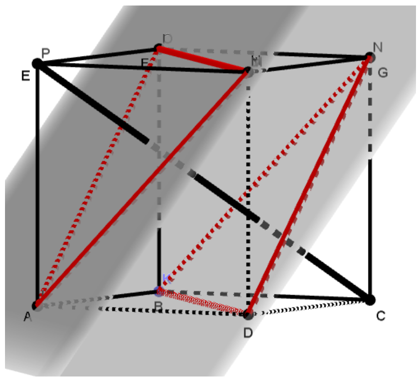
Se considera el cubo $ABCDEFGH$ de la figura cuya arista mide 1 metro. Demuestra que los planos AFH y GDB dividen a la diagonal EC en tres partes iguales.



Solución

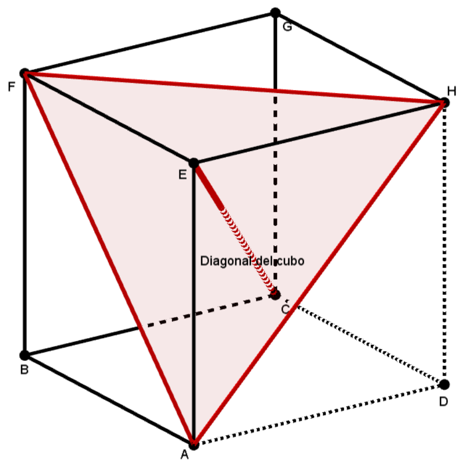
Consideremos los dos planos que pasan por los puntos pedidos, que como se puede apreciar son paralelos. Sus intersecciones con las caras del cubo son de tres segmentos cada uno de los planos, que son las diagonales de las caras.

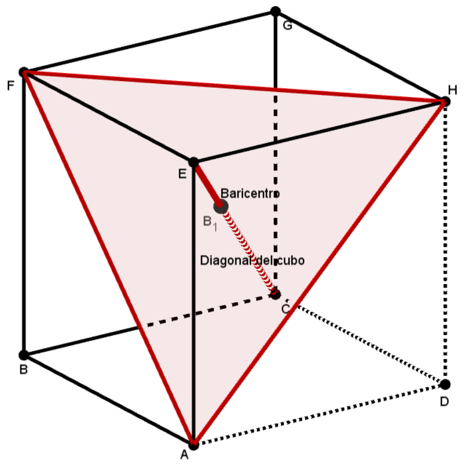




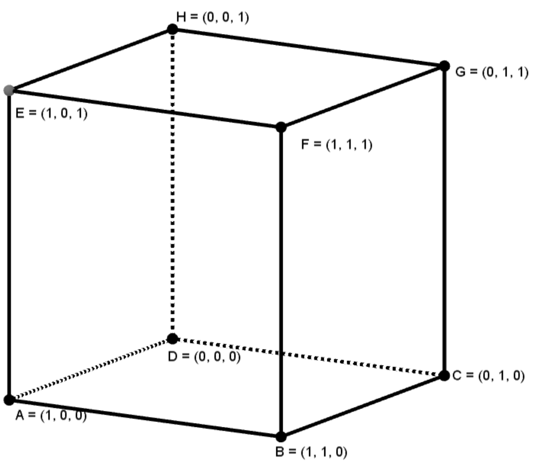
Cada plano define tres segmentos, que forman un triángulo equilátero, cada plano con tres de las caras que corta. Cada lado del triángulo tiene por medida $\sqrt{2}$, al ser las diagonales de las caras del cubo de lado 1.

Además la diagonal EC, pasa por el centro de cada uno de los triángulos, que al ser equiláteros, podremos calcular sus baricentros como la suma de sus coordenadas y dividiendo entre 3.





Si trabajamos en un sistema de referencia de origen (0,0,0) y vectores directores $\overrightarrow{u_1}$=(1,0,0); $\overrightarrow{u_2}$=(0,1,0) y $\overrightarrow{u_3}$=(0,0,1). Podremos calcular las coordenadas de los baricentros como hemos dicho anteriormente. Siendo las coordenadas de los puntos las que muestra la figura:



$$B_1 = \frac{1}{3}(A + F + H) = \frac{1}{3}\big((1,0,0) + (1,1,1) + (0,0,1)\big) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$B_2 = \frac{1}{3}(G + D + B) = \frac{1}{3}\big((0,1,1) + (0,0,0) + (1,1,0)\big) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Finalmente bastará ver que los puntos $E, B_1, B_2\ y\ C$ están a la misma distancia, y eso lo podremos comprobando que los módulos de los vectores $\overrightarrow{EB_1}, \overrightarrow{B_1B_2}\ y\ \overrightarrow{B_2C}$ son iguales.

Veamos que los tres vectores son iguales, por lo que sus módulos serán iguales.

$$\overrightarrow{EB_1} = B_1 - E = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = B_2 - B_1 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{B_2C} = C - B_2 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

Así pues se cumple que:

$$\|\overrightarrow{EB_1}\| = \|\overrightarrow{B_1B_2}\| = \|\overrightarrow{B_2C}\| = \left\|\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

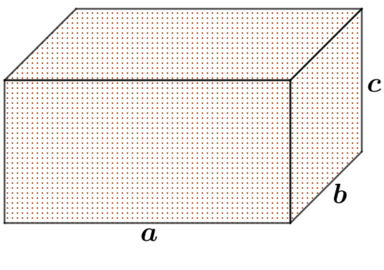
Donde se puede comprobar que la diagonal EC, que medía $\sqrt{3}$, se ha dividido en tres partes iguales.

Problema 02. La aguja en el pajar

Se pincha una aguja en una paca de paja. Si la probabilidad de encontrarla en menos de 15 minutos es "a", ¿cuál sería la probabilidad de encontrarla en una paca de doble volumen que la primera, manteniendo las proporciones de la paca?

Solución

Sean las dimensiones de la alpaca a, b y c las que se muestran en la figura:



El volumen de la alpaca pequeña será:

$$V_p = a \cdot b \cdot c$$

Si consideramos que los lados son aumentan según la proporción $k > 1$, el nuevo volumen será:

$$V_g = k^3 \cdot a \cdot b \cdot c$$

Teniendo en cuenta que la alpaca grande duplica el volumen de la aplaca pequeña tendremos:

$$k^3\ a\ b\ c = 2\ a\ b\ c \quad \Rightarrow \quad k^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{2}$$

La superficie de cada una de las alpacas será:

$$S_p = 4ab + 2bc$$

$$S_g = 4k^2ab + 2k^2bc$$

Por lo que :

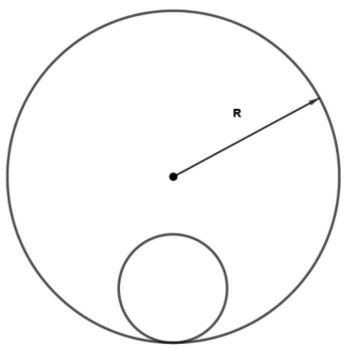
$$S_g = k^2 \cdot S_p = \sqrt[3]{4} \cdot S_p$$

Si la probabilidad de encontrar la aguja en la alpaca pequeña antes de quince minutos es $P(S_p) = a$, para la alpaca grande será:

$$P(S_g) = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$$

Problema 03. Una moneda

Una moneda rueda por dentro de un anillo circular de radio R, de forma que la moneda está hacia abajo cuando vuelve a su posición inicial en la primera vuelta. Calcula el mayor radio posible de la moneda.



Solución

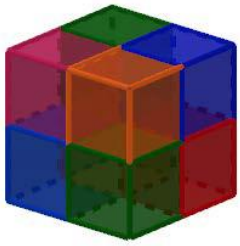
Para que se cumpla la condición del problema necesitamos que *L*=1, 5·*l*, donde *L* se la longituddel círculo grande y *l* la longitud del círculo de la moneda.

Entonces, $2 \cdot \pi \cdot R = 1{,}5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow R = 1{,}5 \cdot r$

Por tanto, $r = \frac{2}{3} R$

Problema 04. Cubos de cuatro colores

Tenemos 8 cubos iguales: 2 rojos, 2 naranjas, 2 verdes y 2 azules. Deseamos acoplarlos de forma que obtengamos un cubo más grande 2x2x2 y que en cada cara aparezcan los cuatro colores. ¿De cuántas formas podemos hacerlo?



Solución

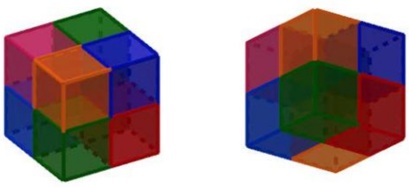
Como queremos ver los cuatro colores en todas las caras, es suficiente saber las diferentes formas de disponer los cuatro colores en una cara, puesto que, a la cara opuesta de esa, cada color tiene que ir al vértice opuesto.

Para una cara fijamos un color (rojo, por ejemplo) en un vértice. Podemos colocar cada uno de los otros tres colores a su lado. Para el siguiente tenemos dos posibilidades y el cuarto va obligado:

En realidad, serían las permutaciones circulares de cuatro elementos

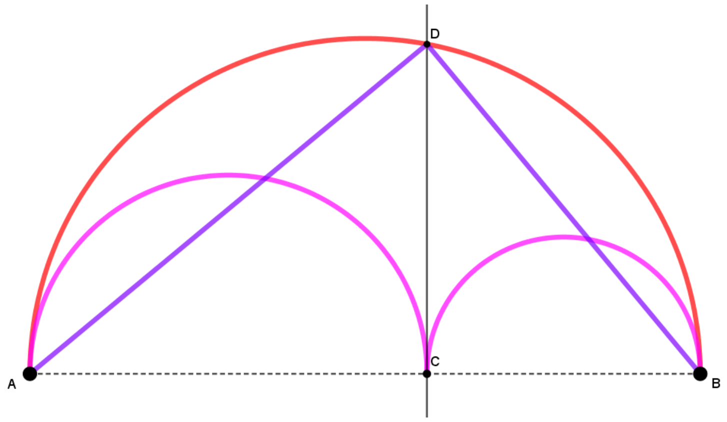
$$PC_4 = (4 - 1)! = 6$$

Aquí tenemos una de las seis configuraciones vista desde arriba y desde abajo.



Problema 05. Todos los caminos conducen al colegio

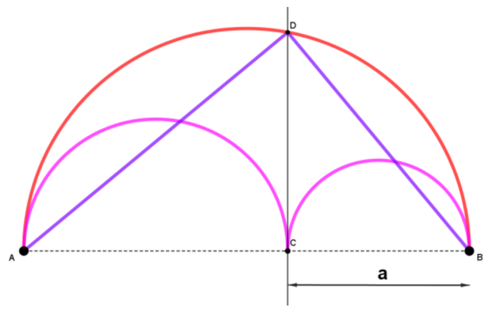
Carlitos va a ir al colegio B desde su casa A, que en línea recta son 500 metros. Determina el recorrido mayor en cada uno de los trayectos, sabiendo que el punto D se puede mover a lo largo de la semicircunferencia roja y demuéstralo.



Solución

Veamos el valor de las tres distancias, la roja, la rosa y la morada. Comenzamos con la distancia roja que será:

$$250\,\pi \cong 785{,}3982 \text{ m}$$

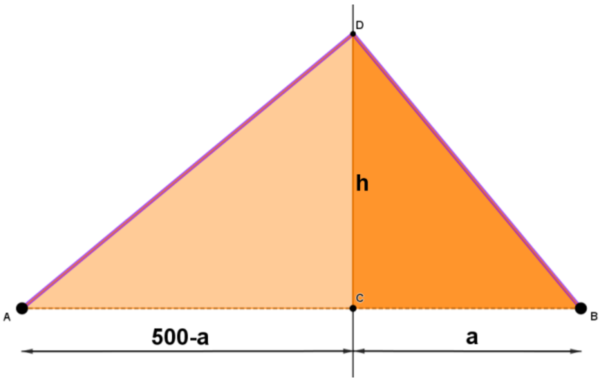


Si llamamos “a” al diámetro de la menor de las semicircunferencias, tendremos que la longitud que se recorrería en el trayecto rosa sería la suma de ambas semicircunferencias:

$$\pi \cdot \frac{500 - a}{2} + \pi \cdot \frac{a}{2} = 250\,\pi$$

Por tanto la distancia que se recorre en ambos casos sería la misma.

Veamos el tercero de los recorridos, el recorrido morado. Para ello vamos a considerar los dos triángulos que se forma, el triángulo ACD y el BCD.



Por el teorema de la altura de un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la misma, que en nuestro caso se traduce por: $h^2 = a \cdot (500 - a) = 500\,a - a^2$

Llamemos "h" a la distancia CD, y calculemos las hipotenusas de ambos triángulos rectángulos. La que corresponde al lado a sería $\sqrt{a^2 + h^2}$, y la que corresponde al triángulo ACD sería $\sqrt{(500 - a)^2 + h^2}$.

Por tanto la longitud del trayecto morado sería:

$$\sqrt{a^2 + h^2} + \sqrt{(500 - a)^2 + h^2}$$

Sustituyendo $h^2 = 500\,a - a^2$ tendremos que la longitud de los trayectos definidos por las hipotenusas de los triángulos, el trayecto morado será:

$$\sqrt{a^2 + 500\,a - a^2} + \sqrt{(500 - a)^2 + 500\,a - a^2}$$

$$\sqrt{500\,a} + \sqrt{250000 - 1000\,a + a^2 + 500\,a - a^2}$$

$$\sqrt{500\,a} + \sqrt{250000 - 500\,a}$$

Si hacemos un cambio de variable y llamamos $x = 500\,a$, se tratara de hallar el máximo de la función $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{500^2 - x}$. Derivemos la función para hallar el máximo de ella:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{500^2 - x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{500^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{500^2 - x}} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{500^2 - x} = 2\sqrt{x} \quad \Rightarrow$$

$$\left(2\sqrt{500^2 - x}\right)^2 = \left(-2\sqrt{x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 4(500^2 - x) = 4x \quad \Rightarrow$$

$$1000000 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = 125000$$

Para este valor de $x = 125000$ corresponde un valor de $a = 250$, y para dicho valor el recorrido morado sería:

$$a = 250 \quad \rightarrow \quad \sqrt{500 \cdot 250} + \sqrt{250000 - 500 \cdot 250} = \sqrt{125000} + \sqrt{125000} =$$

$$= 2\sqrt{125000} \cong 707{,}1068 \text{ m.}$$

En consecuencia, los trayectos rojo y rosa son de aproximadamente $785{,}3982$ m, mientras que los diferentes trayectos morados alcanzarán su máximo cuando el punto C sea el punto medio del segmento AB, y su mayor trayecto será de $707{,}1068$ m.

Problema 06. Tanteando soluciones

Resolver la siguiente ecuación sin hacer uso de calculadoras que las resuelvan de forma directa, trabajando con una aproximación de dos decimales.

$$4^x - 4^{-2x} = 3$$

Solución

Para resolver esta ecuación por tanteo vamos a hacer un cambio de variable, este cambio será: $a = 4^x$.

Con esta nueva variable a, la ecuación se transformará en esta otra:

$$a - \frac{1}{a^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad a^3 - 1 = 3a^2 \quad \Rightarrow \quad a^3 - 3a^2 - 1 = 0$$

Se trata de una ecuación polinómica de grado tres para la que no encontraremos soluciones por Ruffini, ya que no tiene soluciones racionales, pero al ser de grado impar, podemos asegurar que la ecuación tendrá al menos una solución real $\mathbb{R}$. Vamos a acotar las soluciones. Utilicemos el Teorema de los ceros de Bolzano.

Hagamos una tabla para acotar dichos valores, buscando valores de intervalos en los que cambie el signo de la función $f(a) = a^3 - 3a^2 - 1$

$a = 1$	$1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 = -3$	Signo negativo
$a = 2$	$2^3 - 3 \cdot 2^2 - 1 = -5$	Signo negativo
$a = 3$	$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 = -1$	Signo negativo
$a = 4$	$4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 15$	Signo Positivo
El valor estará comprendido entre 3 y 4 $\Rightarrow \quad 3 < a < 4$		

Vamos a aproximar la primera cifra decimal

$a = 3{,}0$	$3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 = -1$	Signo negativo
$a = 3{,}1$	$3{,}1^3 - 3 \cdot 3{,}1^2 - 1 = -0{,}039$	Signo negativo
$a = 3{,}2$	$3{,}2^3 - 3 \cdot 3{,}2^2 - 1 = 1{,}048$	Signo positivo
El valor estará comprendido entre 3,1 y 3,2 $\Rightarrow$ $3{,}1 < a < 3{,}2$		

Busquemos una aproximación con dos cifras decimales

$a = 3{,}10$	$3{,}10^3 - 3 \cdot 3{,}10^2 - 1 = -0{,}039$	Signo negativo
$a = 3{,}11$	$3{,}11^3 - 3 \cdot 3{,}11^2 - 1 \cong 0{,}064$	Signo positivo
El valor estará comprendido entre 3,10 y 3,11 $\Rightarrow$ $3{,}10 < a < 3{,}11$		

Aunque no se nos han pedido más cifras decimales, continuemos alguna cifra decimal más. Aproximemos una tercera cifra decimal

$a = 3{,}100$	$3{,}100^3 - 3 \cdot 3{,}100^2 - 1 = -0{,}039$	Signo negativo
$a = 3{,}101$	$3{,}101^3 - 3 \cdot 3{,}101^2 - 1 \cong -0{,}029$	Signo negativo
$a = 3{,}102$	$3{,}102^3 - 3 \cdot 3{,}102^2 - 1 \cong -0{,}019$	Signo negativo
$a = 3{,}103$	$3{,}103^3 - 3 \cdot 3{,}103^2 - 1 \cong -0{,}008$	Signo negativo
$a = 3{,}104$	$3{,}104^3 - 3 \cdot 3{,}104^2 - 1 \cong 0{,}002$	Signo positivo
El valor estará comprendido entre 3,10 y 3,11 $\Rightarrow$ $3{,}103 < a < 3{,}104$		

Podríamos concluir que el valor aproximado de la solución para la ecuación polinómica de tercer grado podría ser $a \cong 3{,}1035$. (Esa cuarta cifra decimal está estimada)

Para dicho valor aproximado veamos cuál sería el valor de x en la ecuación inicial del problema: $4^x - 4^{-2x} = 3$

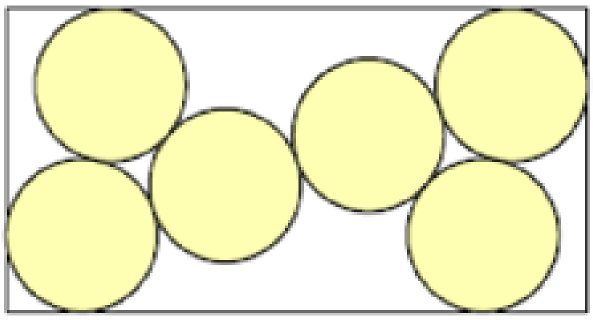
Como el cambio de variable era $a = 4^x$, tendremos que $4^x \cong 3{,}1035$, y tomando logaritmos en ambos lados de la igualdad hallaremos el valor aproximado pedido:

$$\log 4^x \cong \log 3{,}1035 \;\Rightarrow x \cdot \log 4 \cong \log 3{,}1035 \quad \Rightarrow \quad x \cong \frac{\log 3{,}1035}{\log 4}$$

$$x \cong 0{,}816948$$

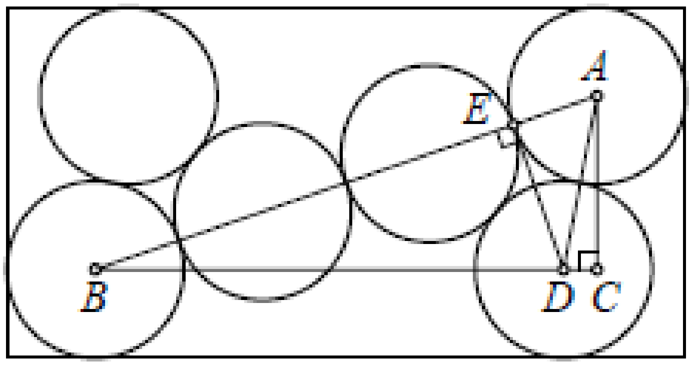
Problema 07. Tanteando soluciones

Encuentra las dimensiones del siguiente rectángulo, sabiendo que el radio de cada uno de los círculos es la unidad.



Solución

Nombramos los puntos en la figura tal y como se ve en la imagen



Llamamos *x* e *y* a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente. Teniendo en cuenta que el diámetro de cada círculo es igual a una unidad, tendríamos lo siguiente:

$$BC = x - 1;\ AC = y - 1;\ AB = 3;\ AD = 1;\ DE = \frac{1}{2}\sqrt{3};\ AD = 5/2$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BDE obtenemos que BD = $\sqrt{7}$. De ello deducimos que $DC = x - 1 - \sqrt{7}$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras a los triángulos ACD y ACB tendríamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\ (x-1-\sqrt{7})^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $x = 1 + \frac{15}{2\sqrt{7}}$ e $y = 1 + \sqrt{\frac{27}{28}}$

Problema 08. Jugando con ventaja

Marta disfruta mucho jugando a los dados con su abuela, aunque es un poco traviesa y siempre hace una pequeña trampa. El juego consiste en lanzar dos dados y sumar los puntos obtenidos, ganando la puntuación más alta.

Como a la abuela le gusta jugar con Marta, cuando los dados caen se hace la despistada, momento que su nieta aprovecha para cambiar uno de los dos dados: si es Marta la que tira, cambia el dado con el menor valor por un 6; mientras que si fue una tirada de su abuela, cambia el valor más alto por un 1.

Tras una larga serie de partidas, ¿cuál será aproximadamente la diferencia entre la media de los resultados obtenidos por ambas jugadoras?

Solución

Si realizamos un número suficiente de lanzamientos, la media de los valores obtenidos será próxima a la media teórica, es decir, a 3,5. Por ello el valor esperado para la suma de dos dados sería 7, en caso de que Marta no hubiese hecho trampas.

Veamos en la siguiente tabla como afectan las trampas a cada uno de los 36 resultados posibles:

DADO 1	DADO 2	MÍN (DADO 1, DADO 2)	MÁX(DADO 1, DADO 2)
1	1	1	1
1	2	1	2
1	3	1	3
1	4	1	4
1	5	1	5
1	6	1	6
2	1	1	2
2	2	2	2
2	3	2	3
2	4	2	4
2	5	2	5
2	6	2	6
3	1	1	3
3	2	2	3
3	3	3	3
3	4	3	4
3	5	3	5
3	6	3	6
4	1	1	4
4	2	2	4
4	3	3	4

4	4	4	4
4	5	4	5
4	6	4	6
5	1	1	5
5	2	2	5
5	3	3	5
5	4	4	5
5	5	5	5
5	6	5	6
6	1	1	6
6	2	2	6
6	3	3	6
6	4	4	6
6	5	5	6
6	6	6	6
		Media: 2,53	**Media: 4,47**

Partiendo de los resultados anteriores, podremos calcular la media de los resultados de ambas participantes tras las trampas realizadas por Marta:

Media de la abuela = 7 - 4,47 + 1 = 3,53

Media de Marta = 7 - 2,53 +6 = 10,47

Diferencia entre ambas medias: 6,94