OMN

FESPM

Problemas propuestos prueba individual

Olimpiada Matemática Nacional 1990-2019

Problemas propuestos prueba individual Olimpiada Matemática Nacional 1990-2019

Editores
Luisa M. Almazán Álvarez
Francisco Haro Laguardia
Secretaría de Actividades con Alumnos de la FESPM

SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Avda. de la Mancha, s/n. (IES Universidad Laboral)

02006 Albacete

publicaciones@fespm.es

http://www.fespm.es

Problemas propuestos prueba individual Olimpiada Matemática Nacional 1990-2019

Editores

Luisa M. Almazán Álvarez y Francisco Haro Laguardia. S.A.A.

ISBN: 978-84-948824-4-9

España, 2020

INDICE

Introducción…………………………………………………………………….	5
I OMN 1990. Pamplona…………………………………………………….	6
II OMN 1991. Tenerife, Las Palmas y Lanzarote……………..	9
III OMN 1992. Huelva…………………………………………………….	12
IV OMN 1993. Andorra…………………………………………………….	16
V OMN 1994. Burgos……………………………………………………...	19
VI OMN 1995. Castellón y Alicante……………………………….	21
VII OMN 1996. Valencia de Alcántara…………………………….	22
VIII OMN 1997. Asturias………………………………………………….	24
IX OMN 1998. Carboneras…………………………………………….	26
X OMN 1999. Albacete……………………………………………………	27
XI OMN 2000. Catalunya……………………………………………….	29
XII OMN 2001. Cantabria………………………………………………	31
XIII OMN 2002. San Fernando………………………………………	34
XIV OMN 2003. Logroño………………………………………………	37
XV OMN 2004. Melilla………………………………………………….	41
XVI OMN 2005. Madrid………………………………………………	44
XVII OMN 2006. Villafranca de los Barros………………………	46
XVIII OMN 2007. Puente de la Reina y Pamplona…………..	48
XIX OMN 2008. Murcia…………………………………………………	50
XX OMN 2009. Tenerife………………………………………………	53
XXI OMN 2010. Palma de Mallorca………………………………	55
XXII OMN 2011. Vigo…………………………………………………...	58
XXIII OMN 2012. Vitoria…………………………………………….	60
XXIVOMN 2013. Andorra…………………………………………….	62
XXV OMN 2014. Barcelona………………………………………….	66
XXVI OMN 2015. Huesca……………………………………………	68
XXVII OMN 2016. Santander……………………………………….	72
XXVIII OMN 2017. Valladolid………………………………………	76
XXIX OMN 2018. Valencia………………………………………….	80
XXX OMN 2019. Jaén………………………………………………..	82

INTRODUCCIÓN

El presente libro pretende no solo ser una recopilación de las pruebas individuales de las tres primeras décadas de la Olimpiada Matemática Nacional, sino también un homenaje a todas las personas, y no solo profesores de matemáticas, que han hecho posible la celebración de estas 30 olimpiadas matemáticas para alumnos de lo que hoy es segundo de Educación Secundaria pero que empezó como Olimpiada Matemática para alumnos de 8º de EGB.

Homenaje pues también a aquellos "valientes", entusiastas docentes que emprendieron esta tarea. Supieron intercambiar ideas, ponerse de acuerdo y hacer trabajo en equipo con compañeros muy cercanos en cuanto a lo que debe ser la enseñanza de las matemáticas en el aula y la detección precoz del talento matemático. Cercanos en las ideas sí, pero a veces muy lejanos en la geografía y ello al amparo de la FESPM.

Gracias a estas primeras piedras la Olimpiada Matemática Nacional fue creciendo hasta contar rápidamente con la participación de todas las sociedades que integran FESPM y el Instituto español en Andorra como invitado.

Durante estos 30 años la olimpiada ha ido creciendo en las diferentes fases previas en cuanto a número de centros y alumnos participantes, tanto públicos como privados, formando una auténtica red. Por lo que podemos considerar que forma parte ya de la Formación del Profesorado y así lo recoge el Ministerio de Educación.

Siendo muchos los profesores que participaron en la elaboración de las pruebas, diversos los medios técnicos con los que se ha ido contando, en principio la recopilación se presentaba como tarea ardua. Había que hacer un trabajo de arqueología importante. Tanto podíamos contar con el libro en papel que se editó con las cinco primeras, como con los artículos publicados en SUMA, como la arqueología efectuada por algunos de nuestros compañeros, a los cuales desde aquí queremos agradecer su colaboración.

Muchas gracias a Eva Acosta, Alberto Bazagoitia, Salvador Caballero, María Dolores Candela, Luís Ceballos, Jordi Comellas, José Ramón Cortiñas, Mariló Eraso, Bienvenido Espinar, Ana Fernández de Betoño, Javier Galarreta, José Luís García, Serapio García, Auxiliadora González, Paco González Ternero, Claudia Lázaro, Juan Martínez, José Antonio Mora, José Luís Muñoz, Isabel Negueruela, Tomás Queralt, Jesús Diego Rodríguez, Pepe Romero, José Manuel Sánchez, Concepción Toboso, Marina A. Toledano, Raquel Vallés y Francisco José Villegas.

Tal vez se pueda observar una cierta falta de uniformidad, pero hemos querido mantener al máximo los formatos originales.

I OLIMPIADA MATEMÁTICA

Pamplona, 1990

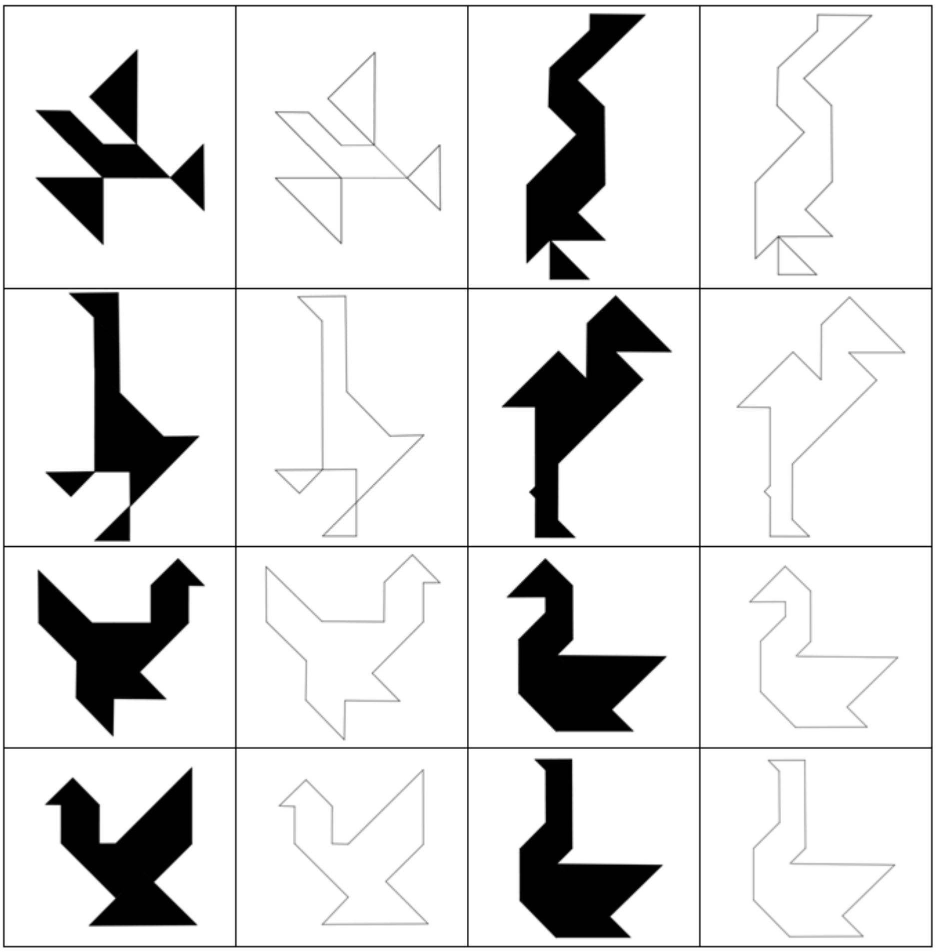
Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»

Matematika Iraskasicen Nafar Elkartea Tornamira

Problema 1

El I.C.O.N.A., para preservar de su extinción a estos animales, ha elaborado un riguroso plan: “declarar como especies superprotegidas a estas aves”.

a) Intenta descomponer cada una de estas figuras en las siete piezas del TANGRAM y dibújalas en las siluetas adjuntas.
b) Tomando como unidad de superficie la pieza cuadrada, ¿Cuál será la superficie de cada una de las aves?

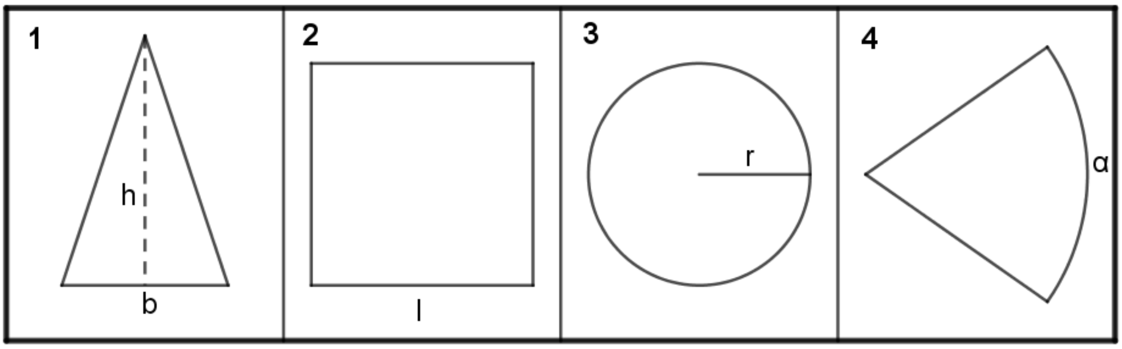


Problema 2

Tres parejas de novios deciden pasar la tarde en la Sierra de Huelva; tras preparar la merienda, emprenden su viaje paralelo a uno de los márgenes del río Odiel y llegan a un paraje encantador para quedarse. Para acceder a él deben atravesar el río: el bote en el que han de hacerlo sólo puede transportar a dos personas a la vez. Se pregunta cómo pasarán estas seis personas, de manera que ninguna mujer quede en compañía de uno o dos hombres si no está presente su novio.

Problema 3

Dibuja figuras cuya superficie sea el doble de las que se dan a continuación:

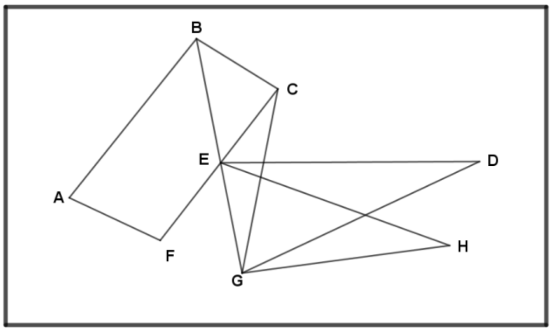


Problema 4

Últimamente muchos "profes" de Matemáticas que conocéis, se quejan de que la Geometría está olvidada. Estamos seguros que vosotros vais a demostrar lo contrario. Te vamos a proponer un problema en el que el razonamiento que utilices para su resolución ha de ser geométrico. ¿Por qué un tractor, que como sabes las ruedas delanteras son más pequeñas que las traseras, el eje delantero se desgasta más y se calienta con mayor frecuencia que el trasero?

Problema 5

La F.E.S.P.M. ha recibido el encargo del Comité Ciclista Internacional de que estudie si existe posibilidad de organizar una prueba "Tour de los matemáticos" entre las ciudades A, B,....., H, de tal modo que los ciclistas recorran todo el trayecto del plano sin pasar dos veces por la misma carretera. ¿Puedes ayudar a la F.E.S.P.M. en este difícil compromiso?



Problema 6

A veces cuando paseamos, observamos que algunas matrículas de automóviles, los números de las casas, …. Contienen cifras curiosas que se leen igual de izquierda a derecha que viceversa, como el número 1331. Estos números se llaman capicúas. Sin contar los números de un solo dígito:

a. ¿Cuál es el menor número primo capicúa?
b. ¿Cuál es el menor número capicúa que sea un cuadrado perfecto?
c. ¿Cuáles son los cinco primeros números primos capicúas entre el 100 y el 200?

Problema 7

En una ciudad, 2/3 de los hombres están casados con los 3/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de solteros en dicha ciudad?

II OLIMPIADA MATEMÁTICA

Tenerife, Las Palmas y Lanzarote, 1991

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Problema 1

En una votación para la elección de un alcalde entre dos candidatos A y B, se emiten nueve votos y gana A por uno.

Hallar y describir el número de maneras en que pueden contarse las papeletas de votación, de tal forma que siempre vaya por delante el candidato ganador.

Problema 2

Las reglas del tres en raya son bien conocidas: sobre las casillas de un tablero de 3x3, dos jugadores colocan sus piezas alternativamente, (cruces y monedas, por ejemplo). Gana quien consigue una línea recta con sus piezas, bien sea horizontal, vertical u oblicuamente. Pues bien, observando las figuras 1, 2 y 3 y considerando que, aun sin ser expertos, ambos jugadores saben jugar, resuelve las siguientes situaciones:

1. En el tablero de la figura 1: ¿cuál fue el primero en jugar, cruces o monedas?
2. En el tablero de la figura 2: ¿es posible que se dé esta situación?
3. En el tablero de la figura 3: ¿en qué casilla se hizo la última jugada?

   Explícalo adecuadamente.

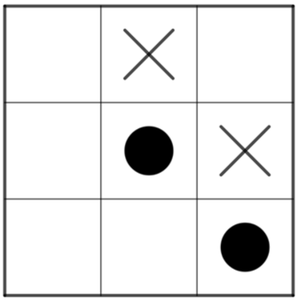


Fig. 1

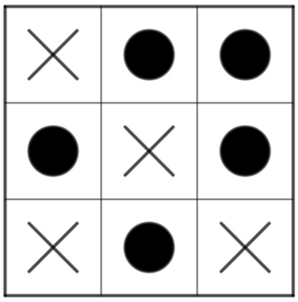


Fig. 2

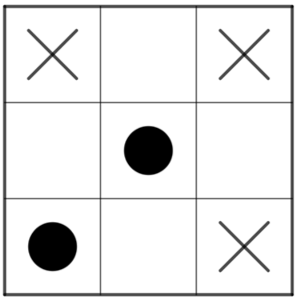


Fig. 3

Problema 3

Se quiere batir el record Guinness de apilamiento de pelotas de tenis. Para ello se forma una pirámide de base cuadrada adosando las pelotas y disminuyendo en cada capa una pelota por lado de los sucesivos cuadrados hasta la bola final, que formará el vértice superior de la pirámide.

Sabiendo que el número de bolas del lado de la base es 1.000, ¿cuántas pelotas se verán externamente?

Problema 4

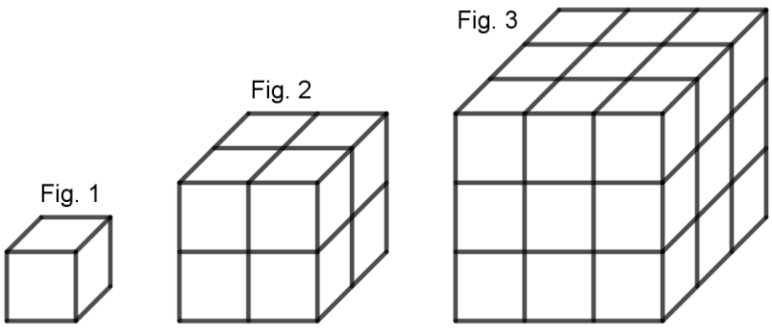
Tenemos el número suficiente de cubitos como el de la figura 1. Los apilamos formando un cubo de 2x2x2 cubitos. ¿Cuántos cubitos no se ven sin variar el punto de vista de la figura? Basta con que veas una de las caras del cubito para considerar que se ve (figura 2).

Tomamos 27 cubitos y los apilamos hasta formar un cubo de 3x3x3, (figura 3). ¿Cuántos cubitos no ves?

Se hace lo mismo con el cubo 4x4x4=64. ¿Cuántos cubitos no ves?

¿Y en el caso de que se apilen $n \times n \times n = n^3$ cubitos?

Explica las conclusiones a las que llegues.



Problema 5

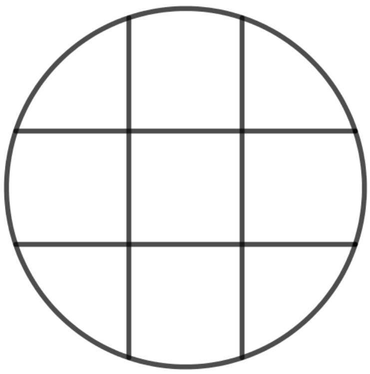
Demuestra que si al producto de los números anterior y posterior a cualquier múltiplo de 6 le sumamos 1, el resultado es múltiplo de 36.

Problema 6

En el país de los números andan locos para intentar colocar las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en ocho de los espacios de esta superficie circular, atendiendo a la siguiente condición:

No pueden estar dos números consecutivos formando frontera por línea ni vértice.

¿Puedes encontrar la solución?

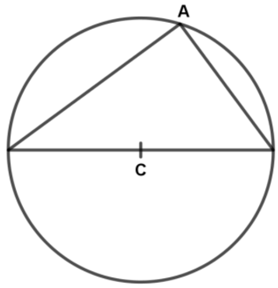


Problema 7

Si a los términos de una fracción irreducible se les suma el denominador, y a la fracción resultante se le resta la de partida, se obtiene de nuevo ésta. ¿De qué fracción se trata?

Problema 8

Demuestra que el ángulo A de la figura es recto. El lado opuesto a A es un diámetro del círculo.



Problema 9

En la Agencia de Investigaciones M.I.A., (Matemáticas Investigadores y Aclaradas), se han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número de agentes tal que: si encargamos una misión a cada agente, sobran "x" misiones; pero si damos "x" misiones a cada agente, se quedan "x" agentes sin misión. Como los agentes y misiones suman menos de 15, ¿sabrías decirnos cuántos agentes y misiones son?

Problema 10

¡Mira qué fácil se simplifican esta serie de fracciones!

$$\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4};\qquad \frac{166}{664}=\frac{1\cancel{66}}{\cancel{66}4}=\frac{1}{4};\qquad \frac{1.666}{6.664}=\frac{1.\cancel{666}}{\cancel{6.66}4}=\frac{1}{4};\qquad \dots\ \dots\ \dots$$

¿Hay fracciones como la primera de la serie, donde el numerador y el denominador son números entre 10 y 100 con sus cifras diferentes y que se "simplifican" de igual manera?

¿Generan fracciones de forma diferente a como lo hacen $\frac{16}{64}$?

III OLIMPIADA MATEMÁTICA

Huelva, 1992

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Problema 1

Fíjate en esta fila de celdas:

3	4				

Comienza con 3 y 4, luego se continúa sumando éstos, y luego el 4 y el 7 que nos da 11, y …

3	4	7	11	18	29

Pero si te dan sólo el primer número y el último, ¿sabrías cuáles son los otros números?

6					63

Problema 2

Calcula el producto L x H sabiendo que:

$$L = a + b + c$$

$$H = d + c = f + g$$

siendo a, b, c, d, f y g números naturales y que:

$$b \times f = 91$$

$$a \times d = 18$$

$$c \times d = 16$$

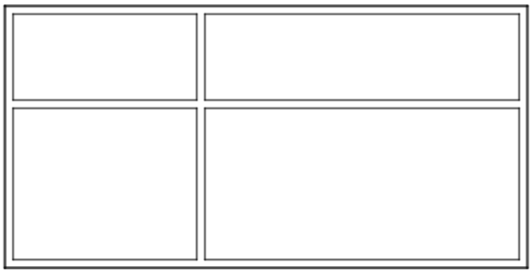
$$b \times g = 39$$

Problema 3

El Ayuntamiento de Bollullos Par del Condado dispone de un terreno en forma rectangular, doble de largo que de ancho. Quiere parcelar el mismo en cuatro parcelas, también rectangulares, para dedicarlas a distintos usos, a saber:

- La menor a zona de servicios, cuya superficie está comprendida entre 30 y 40 metros cuadrados.
- La mayor para una cancha de baloncesto de 450 m^2.
- Las otras dos iguales en superficie, a zonas verdes.

¿De cuántos metros cuadrados dispone el Ayuntamiento de Bollullos?

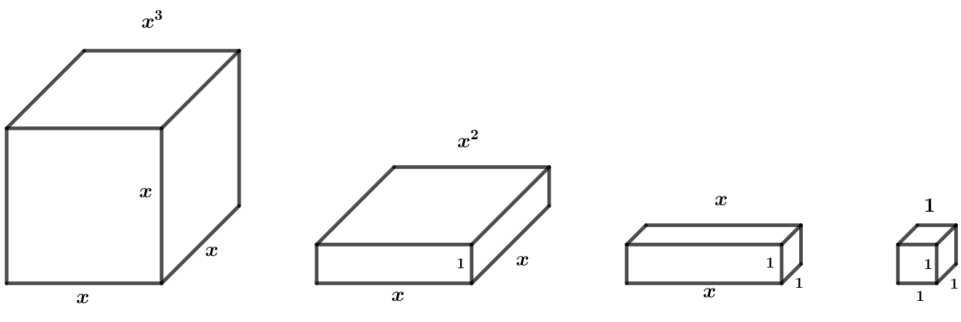


Problema 4

El marido de una señora embarazada fallece antes de dar ésta a luz. Su deseo es que, si nace niño, 2/3 de su herencia sea para el niño y 1/3 para la madre; pero si nace una niña, 1/3 de la herencia para la niña y los 2/3 restantes para la madre. Como quiera que han nacido gemelos, niño y niña, el albacea testamentario se pregunta: ¿Cómo he de hacer el reparto? ¿Podrías tú resolverle esa dificultad?

Problema 5

Aquí tienes un juego, el ORTOPOLI:



(a) (b) (c) (d)

Como ves, se compone de cuatro piezas tal como se indica en el dibujo, manipulables todas.

- La pieza (d), por tener la arista unidad, será: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- La pieza (c), por desconocer una de las dimensiones, será: $x \cdot 1 \cdot 1 = x$
- La pieza (b) será: $x \cdot x \cdot 1 = x^2$
- La pieza (a) será: $x \cdot x \cdot x = x^3$

Forma con las piezas que creas necesarias las siguientes expresiones razonadamente, haciendo posteriormente el dibujo:

e) 8 f) 3 x g) x · (x+1) · x

Teniendo en cuenta los dibujos y, si quieres, utilizando previamente las piezas, indica la expresión que representan.

Problema 6

Los pentominós son figuras formadas por cinco cuadrados unidos por uno de sus lados:

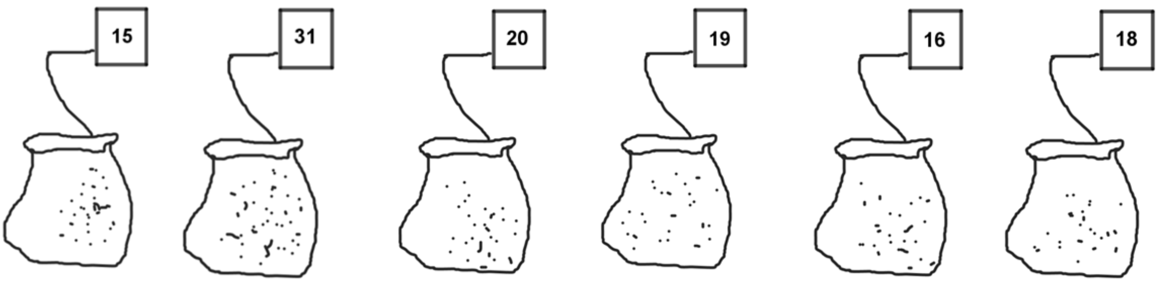
En este tablero hemos distribuido 25 vocales y te pedimos que localices cinco pentominós distintos y que en todos ellos existan las vocales a, e, i, o, u.

e	a	i	o	i
u	e	u	e	o
o	i	a	o	a
i	u	e	a	i
a	o	u	e	u

Problema 7

En un puesto de venta del mercado de mayoristas de mi ciudad sólo quedan 6 sacos, todos ellos de patatas, salvo uno que era de cebollas. Llegó un cliente y se llevó una cierta cantidad de patatas; posteriormente llegó otro cliente que se llevó el doble de patatas que el anterior, quedándose el saco de cebollas.

Sabiendo que en este tipo de mercados sólo se venden sacos completos y que todos ellos llevan el peso marcado en la etiqueta, según la figura, ¿Cuál es el saco de cebollas?



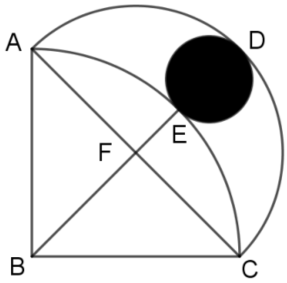
Problema 8

Un arquitecto quiere construir una piscina con la forma circular DE, y conoce los lados del triángulo ABC, AB = CB = 20 m.

¿Eres capaz de sorprenderte, al igual que el arquitecto, cuando comprobó que el área de la figura AECD es la misma que la del triángulo rectángulo isósceles ABC? Demuéstralo.

¿Es posible hacer un "largo" en la dirección ED en la piscina de más de ocho metros?

Razona la respuesta.



IV OLIMPIADA NACIONAL

Andorra, 1993

Instituto Español de Andorra

Problema 1 La cinta y el carrete

Sobre un carrete vacío se enrolla firmemente una cinta de 25 metros de largo y 0,1 mm. de espesor, dando así un rodillo de 10 cm. de diámetro.

¿Cuál es el diámetro del carrete original?

Problema 2 El gorro de carnaval

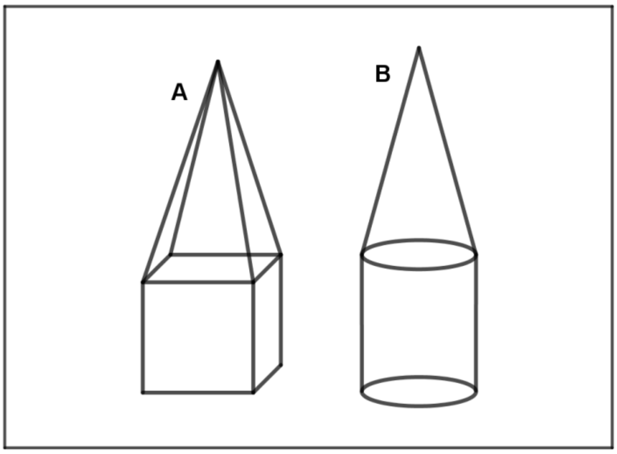
Berta, en las pasadas fiestas de Carnaval, hizo un gorro hueco como el de la figura A, con las siguientes medidas: diagonal de una de las caras cuadradas 36 cm. y altura total de la figura 90 cm.

Alberto hizo un gorro como el de la figura B y utilizó la misma cantidad de cartulina que Berta.

Sabemos además que:

- Área lateral de la pirámide = Área lateral del cono.
- Arista lateral del prisma = Generatriz del cilindro.

¿Cuál es la medida de la generatriz del cono de la figura B?



Problema 3 Número de huevos

Andrés, el recovero, iba al mercado, y al preguntársele cuántos huevos tenía contestó que tomados en grupos de 11 sobraban 5, y tomados en grupos de 23 sobraban 3. ¿Cuál es el menor número de huevos que podía tener?

En otra ocasión respondió que tomados en grupos de 2, 3, 4, 5, 6 y 7 sobraban 1, 2, 3, 4, 5 y ninguno respectivamente. ¿Cuál es el menor número de huevos en este caso?

Problema 4 Dos hermanos millonarios

En la última reunión familiar, mi hermana de Zaragoza me comentó que tenía, desde hace un año, 2.000.000 de pts. en una supercuenta que le daba el 10,25% de interés anual; además, en un sorteo de los que organiza la entidad bancaria para este tipo de cuentas le tocó un televisor valorado en 40.000 pts.

- "Sí, pero tú no cobras esos intereses" le repliqué.
- "No, me han descontado un 25% de los mismos en concepto de impuestos de Hacienda y, además, el banco me cobró el 5% de la ganancia neta en concepto de comisión y gastos bancarios".
- "Pues yo, durante ese período de tiempo, compré 80 televisores en Barcelona, por la misma cantidad que tú tienes invertida, y aunque tuve que pagar además el 15% de IVA y 23.000 pts. de portes, luego en la Aduana española me devolvieron el IVA y pagué el 5% en la Aduana andorrana. Los primeros 55 televisores los vendí a 35.000 pts. y el resto se los quedó un hotel que se estaba instalando por 800.000 pts. Creo que he ganado más que tú."

Aclárales a estos dos hermanos cuánto ha ganado cada uno y diles cual ha sido el % neto de ganancias de la ahorradora y del comerciante.

Problema 5 Amores matemáticos

Le pregunté a mi amor cuál era el numero de su casa, en la calle de la Lógica.
"Pruébame – replicó – cuánto me adoras si lo calculas. No solamente operaciones, sino también debes pensar y de ese modo unes la claridad y la fuerza de la intuición con mi posición"

Y dócilmente le contesté:

"Mi adorada, dame los datos fácticos y hablaremos de metafísica después."

Directo al grano se precipitó:

"Mi morada tiene tres cifras, todas diferentes.
Y van aumentando, creo como tu amor por mí.
¿Tiene divisores? Si, dos diferentes;
números primos ambos, mayores que diez más tres.
Suma los tres dígitos del número que buscas
y te encontrarás un resultado
mayor que una decena y media."

¿Cuál es el número de la casa de mi amada?

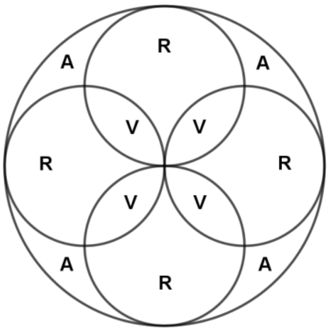
Problema 6 El tren cronometrado

Susana y Mikel, a la salida de la clase, observan el paso de un tren y con el cronómetro miden el tiempo que tarda en pasar todo él por un punto de referencia (poste) y en atravesar tras una tapia de 240 metros. Los tiempos empleados han sido 10 y 30 segundos, respectivamente. Pensando en la relación existente entre espacio, tiempo y velocidad, deciden calcular la longitud del tren y su velocidad. Explícales cómo lo harías tú.

Problema 7 El rosetón de la Iglesia

La vidriera de la fachada principal de una iglesia contiene un rosetón como el de la figura, donde las letras R, V y A representan los colores rojo, verde y azul, respectivamente.

Sabiendo que se han empleado 400 centímetros cuadrados de cristal verde, ¿cuántos centímetros cuadrados de cristal azul son necesarios?



Problema 8 Doblando el papel

"Mitad de 90, dos terceras partes de 180, triángulo equilátero …" murmuraba Ricardo mientras intentaba ver un ángulo de 60° dibujando en el papel, sin tener a mano ni regla, ni medidor de ángulos.

De repente empezó a hacer dobleces con el papel hasta conseguirlo. Intenta descubrir cómo lo hizo y explícalo razonadamente. (Puedes ensayar con los folios en blanco que se te dan).

V OLIMPIADA NACIONAL

Burgos, 1994

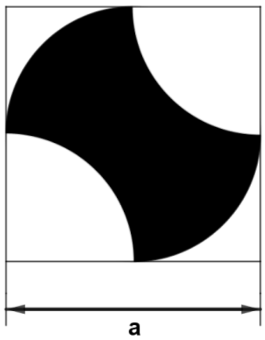
Asociación Castellana y Leonesa de Profesores de Matemáticas
«Miguel de Guzmán»

Problema 1 El caballo

Tito y Raquel tienen un solo caballo y quieren desplazarse de un pueblo a otro. Acuerdan hacer el recorrido por tramos, de manera que los dos lleguen al pueblo a la vez y vayan alternándose el caballo de manera equitativa. Raquel sale primero a caballo y al final del primer tramo deja atado el caballo para que Tito, que viene caminando, lo recoja cuando llegue. Mientras tanto, ella sigue caminando hasta que pueda volver a cabalgar y así sucesivamente. Si ellos caminan haciendo 4 kilómetros cada hora y el caballo va a 12 kilómetros por hora, ¿qué parte del tiempo descansa el caballo?

Problema 2 La figura

Calcula el perímetro y el área de la figura sombreada:



Problema 3 La balanza

Disponemos de una balanza con cinco pesas de 3, 6, 8, 12 y 16 gramos respectivamente. Tenemos también 33 objetos de 1, 2, 3, … y 33 gramos respectivamente. Uno solo de estos objetos no puede ser equilibrado con las pesas dadas. ¿Cuál es?

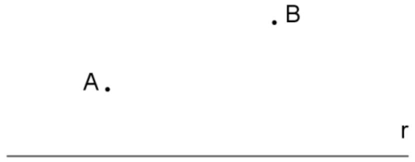
Aclaración: cuando llegues a la solución, intenta encontrar otros procedimientos que pudieran haberse utilizado para resolver el problema de manera más sencilla, rápida, elegante…

Problema 4 La sandía

Una sandía pesa 10 kilogramos, de los cuales el 99% es agua. Después de cierto tiempo al sol, se vaporó parte del agua, siendo ahora el porcentaje de agua del 98%.

¿Cuánto pesa ahora la sandía?

Problema 5 Agua del río



A y B representan dos ciudades y r un río. Estas dos ciudades necesitan abastecerse de agua de dicho río y se quieren construir una toma de agua que sirva para las dos.

¿En qué punto del río debe llevarse a cabo la construcción para que el gasto de conducción sea el mínimo?

Aclaración: No se trata de llegar a la solución ideal, sino de buscar distintas soluciones al problema y razonar cuál puede ser la mejor mostrando ingenio, intuición y razonamiento en las conjeturas.

Problema 6 Panecillos

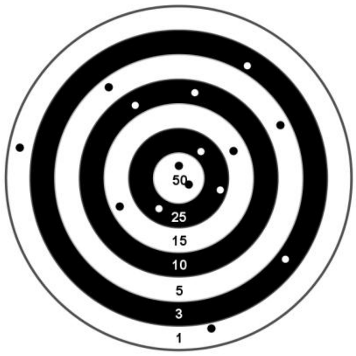
Pedro, Felipe y Juan son tres amigos dispuestos a salir de excursión. Cuentan para la merienda con un queso y veintiún panecillos. Cuando ya han preparado siete bocadillos, advierten que si siguen poniendo igual cantidad de queso en los restantes panes, éste no alcanzará. Reducen pues a la mitad la ración de queso en cada bocadillo. No obstante, el queso se termina cuando aún quedan siete panecillos vacíos. No parten ni desmontan ninguno de los panes –ni los de ración entera de queso, ni los de media ración, ni los que no llevan queso-, a pesar de lo cual reparten equitativamente la merienda, y a cada uno le toca igual cantidad de queso y panecillos. ¿Cómo lo hacen?

VI OLIMPIADA NACIONAL

Castellón y Alicante, 1995

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana
«Al -Khwarizmi»

Problema 1 Los tres arqueros



Tres arqueros han realizado, cada uno, 5 disparos contra la diana: en ella se han indicado los puntos de impacto. En el centro sólo han atinado dos veces. ¿Qué puntuación han conseguido cada arquero, teniendo en cuenta que, al final han empatado y cuál puede haber sido la secuencia de puntos de los cinco disparos de cada uno?

Problema 2 La reina cautiva

Una reina cautiva, con su hijo y su hija, fueron encerrados en lo alto de una torre. En la parte exterior de la ventana había una polea de la que pendía una soga con una canasta atada en cada extremo; ambas canastas de igual peso. Los cautivos lograron escapar sanos y salvos usando una pesa que había en la habitación. Habría sido peligroso para cualquiera de los tres descender pesando más de 15 kg que el contenido de la canasta inferior. Porque habría bajado demasiado rápido; y se las ingeniaron para no pesar tampoco menos de esa diferencia de 15 kg.

La canasta que bajaba hacía subir naturalmente a la otra.

¿Cómo lo consiguieron?

La reina pesaba 75 kg, la hija 45, el hijo 30 kg, y la pesa 15 kg.

Problema 3 El campo triangular

Un campo triangular está rodeado por tres campos cuadrados, cada uno de los cuales tiene un lado común con el triángulo. Las superficies de estos tres campos son iguales a 529, 256 y 81 Ha. ¿Cuál es la superficie del campo triangular?

Problema 4 Los siete sultanes

Siete sultanes tienen en total 2.879 mujeres. No hay dos con la misma cantidad. Si dividimos la cantidad de mujeres de uno cualquiera de esos harenes por la cantidad de mujeres de cualquier otro harén menor, el resultado es siempre un número entero.

Dime, infiel, cuántas mujeres hay en cada uno de los harenes.

VII OLIMPIADA NACIONAL

Valencia de Alcántara, 1996

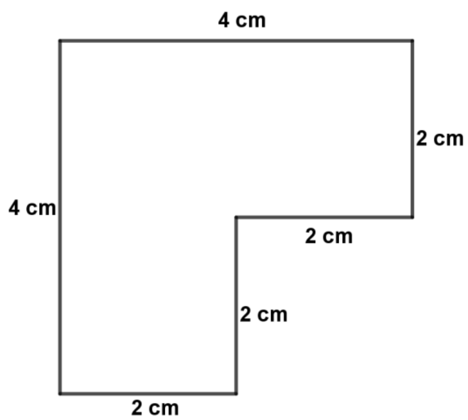
Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

Problema 1 Diferencia de tamaño

En la novela *Los viajes de Gulliver* de Jonathan Swift (1726) se narra que Gulliver, el protagonista, viaja por varios países imaginarios, uno de ellos es Lilliput, cuyos habitantes son todos enanos y donde todo es reducido de tamaño. Encontrándose en este último país sabemos que Gulliver es semejante a los liliputienses, siendo 12 veces más alto que ellos. Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos colchones de liliputienses deben coserse entre sí para hacerle uno a Gulliver, de forma que pueda dormir tan cómodamente como ellos?
b) La casa media de un liliputiense tiene un solar de 0,75 m^2. ¿Cuál debe ser el solar que debe tener la casa que le construyan?

Problema 2 Polieles



Dada la siguiente figura geométrica y tomándola como guía:

a) Dividir la figura en 4 piezas iguales.
b) Dibujar razonadamente:
   • Un triángulo isósceles de la misma área que la figura dada.
   • Un rombo de la misma área que la figura dada.
   • Un hexágono de la misma área que la figura dada. ¿Cuál es su perímetro?

Problema 3 Cubo manía

Se tienen tres cubos dibujados de forma diferente*. A cada uno de los colores se le ha asignado un valor natural.

¿Serías capaz de calcular dichos valores, sabiendo que cumplen las siguientes condiciones?:

a) La suma de los valores correspondientes a todas las caras de los cubos es 96.
b) La suma de los valores de las caras de uno de los cubos es 29.

¿Es única la solución?

* 1 cubo con 4 caras amarilla y 2 verdes; otro con 3 caras amarillas y 3 verdes y el tercer cubo con 1 cara amarilla, 3 verdes y 2 azules.

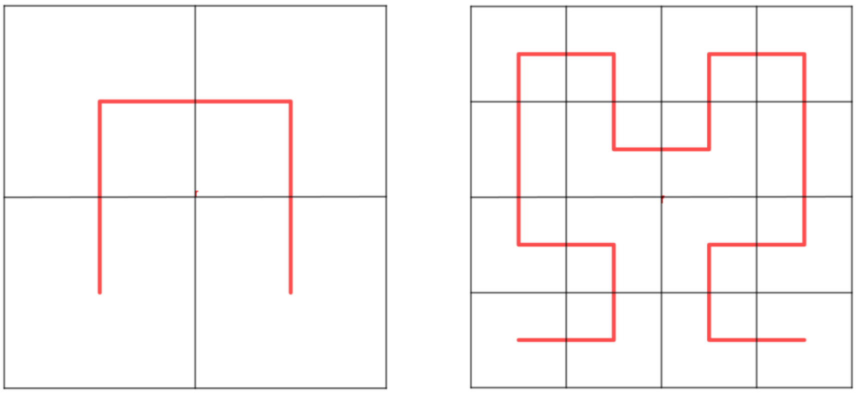
Problema 4 Curva de Hilbert

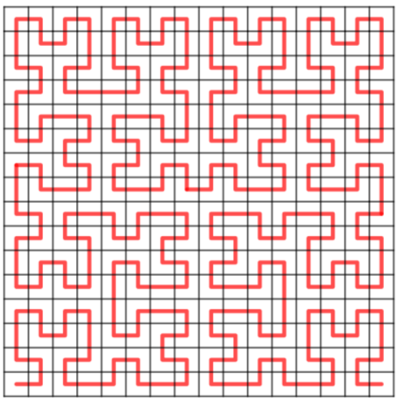
Las siguientes poligonales están construidas uniendo los centros de los cuadrados obtenidos al ir dividiendo cada cuadrado de la fase anterior en otros cuatro cuadrados.

Cada poligonal debe empezar en el centro del cuadrado de la esquina inferior izquierda y debe terminar en el centro del cuadrado de la esquina inferior derecha.

Puedes observar que cada poligonal está formada por cuatro poligonales como la de la fase anterior (reducida de tamaño) y conectándolas entre sí mediante tres segmentos de igual longitud.

En el dibujo que damos, las poligonales corresponden a la 1ª, 2ª y 4ª fase. Construye el dibujo correspondiente a la 3ª fase. ¿Cuál es la longitud, si el lado del cuadrado completo es 10 cm?





VIII OLIMPIADA NACIONAL

Asturias, 1997

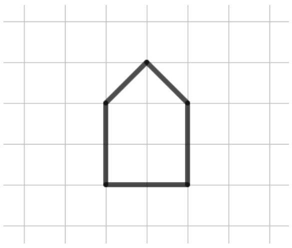
Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»

Problema 1 La escalera mecánica

Juan y Luís van de compras al Corte Inglés, tienen un poco de prisa y se suben en una escalera mecánica. Juan es el triple de rápido que su amigo subiendo (ambos suben de peldaño en peldaño). Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luís 50 escalones. Con estos datos calcular los peldaños «visibles» de la escalera.

Problema 2 La casa de papel

Sobre una cuadrícula Lucía ha dibujado una pequeña casa. Su amiga Marga dice que con dos cortes de tijera rectilíneos se pueden obtener tres trozos con los que se puede formar un cuadrado. ¿Cómo han de hacerse los cortes?



Problema 3 Los Rodríguez

Los Srs. Rodríguez tienen cinco niños de lo más activos:

- El lunes van al cine CUATRO de ellos cuyas edades suman 38 años.
- El martes por la tarde van a la pista de hielo CUATRO cuyas edades suman 35 años.
- El miércoles van al Parque de Atracciones CUATRO sumando 36 años sus edades.
- El jueves salen CUATRO a nadar a la piscina, sus edades suman ahora 36 años.
- El viernes van CUATRO a un concierto de Rock, sus edades suman 38.
- El sábado van al fútbol CUATRO y esta vez sus edades suman 39 años.

Sabemos que ningún chico sale las seis ocasiones.

¿Sabrás calcular la edad de cada muchacho?

Problema 4 ¡Vaya frasecita!

Completa la siguiente frase de modo que sea verdad lo que dice. Busca todas las soluciones posibles.

El número de 0 de esta frase es__, el de 1 es __, el de 2 es __,
el de 3 es __, el de 4 es __, el de 5 es __, el de 6 es __,
el de 7 es __, el de 8 es __ y el de 9 es __.

Problema 5 Baldosas

Tenemos un suelo rectangular formado por baldosas cuadradas de color blanco, que está rodeado de baldosas sombreadas, también cuadradas, tal y como se indica en la figura:

¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo blanco para que el área de la región interior sea igual al área de la franja negra que lo rodea, cuando esta franja negra es de una badosa de ancha?

¿Y cuándo es de 2, de 3, de 4, …?

Problema 6 El telesilla

En un telesilla, el momento en que Paco, que está sentado en la silla número 98, se cruza con la silla nº 105, su amiga Carmen que ocupa la silla nº 241 se cruza con la nº 230.

Por supuesto, las sillas están regularmente espaciadas sobre el cable y están numeradas en orden a partir del nº 1. ¿Cuántas sillas tiene este remonte?

IX OLIMPIADA NACIONAL

Carboneras, 1998

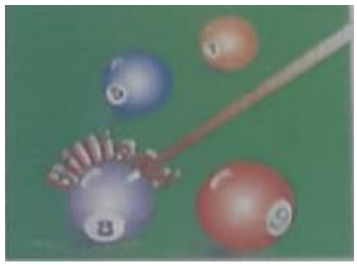
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Problema 1 Los pintores

Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día solo les quedó un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

Nota: la jornada laboral está compuesta por 4 horas antes del mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

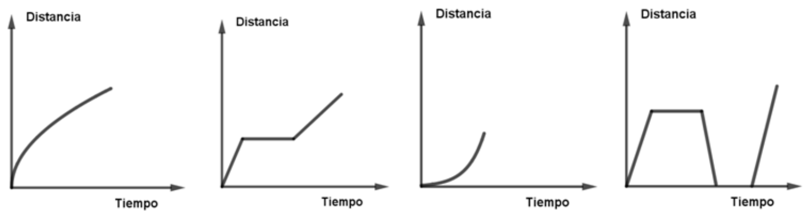
Problema 2 La mesa de billar



Tenemos una mesa de billar con forma rectangular de lados a y b números enteros. Golpeamos una bola desde una esquina con ángulo de 45°. ¿Cuántas veces rebotará en las bandas antes de entrar en otra esquina? Se supone que la bola no toma efecto y que puede rodar indefinidamente.

Problema 3 Cada gráfica con su pareja

Las gráficas de la figura corresponden al recorrido que efectúan hasta la misma oficina cuatro personas que habitan en un mismo edificio. Da una posible interpretación



(a) (b) (c) (d)

Problema 4 Doblar y cortar

Se dobla un papel (A4) tres veces y se corta, por la esquina que no forma libro, un triángulo isósceles y rectángulo. ¿Qué figura aparece si se despliega el papel?

X OLIMPIADA NACIONAL

Albacete, 1999

Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas

Problema 1 Seis monedas

Coloca seis monedas en un modelo de casilla como el que indica la figura, de manera que en las monedas de la fila superior se vea la cara y en las monedas de la fila inferior se vea la cruz.

El objetivo es intercambiar las caras con las cruces en el menor número de movimientos.

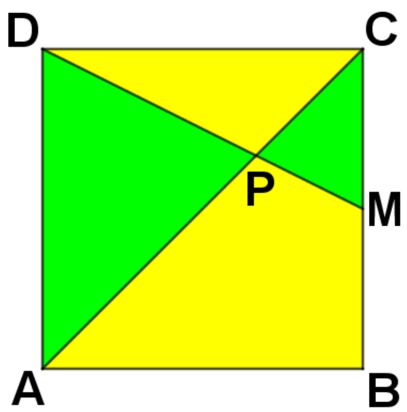
Caras y cruces se mueven por turno hacia cualquier casilla contigua que esté desocupada y cada movimiento puede hacerse hacia arriba, hacia abajo, de lado o en diagonal.

¿Cuál es el mínimo número de movimientos para intercambiarlas?

Cuando encuentres la solución trata de resolver un problema parecido, con una fila de cinco casillas con cuatro caras encima de otra fila con cuatro casillas de cruces. Prueba entonces a diseñar una estrategia para resolver este problema en un caso general.

Problema 2 Cuadrado

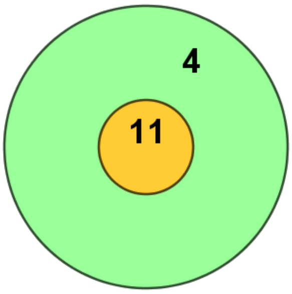
En un cuadrado ABCD de lado unidad se traza la diagonal AC. Se une el vértice D con el punto medio, M del lado BC.



- Calcular la razón entre las superficies del cuadrilátero ABMP y el triángulo CDP.
- ¿Cuál sería la razón si M en lugar de estar en el punto medio del lado CB, estuviese a **1/3** del vértice B?
- ¿Podrías aportar algún tipo de solución para M situado a **1/n** del vértice B?

Problema 3 Jugando a los dardos

Juan y María están jugando a los dardos tirando sobre una diana como la que muestra el dibujo.



La diana está dividida en solo dos regiones: la interior vale 11 puntos y la exterior vale 4 puntos.

Los jugadores tiran los dardos por turnos, sumando los totales, hasta que alguno alcanza una puntuación previamente acordada. Este será el ganador.

Cuando Juan y María estaban jugando a conseguir 21 puntos, se dieron cuenta de que no eran capaces de conseguir esa puntuación. Así es que cogieron papel y lápiz y se sentaron para averiguar todos los totales posibles.

Menos mal que vieron que, a partir de cierto número, cualquier puntuación era posible. Entonces acordaron que en el futuro siempre fijarían un total suficientemente grande.

Encuentra todos los totales imposibles de obtener en este juego.

Investiga acerca de los números imposibles de obtener cuando se definen otras puntuaciones para cada región de la diana.

Tal vez puedas descubrir una fórmula general para saber la máxima puntuación imposible cuando la región interior vale **m** puntos y la exterior **n** puntos.

XI OLIMPIADA NACIONAL

Gerona, Tarragona y Barcelona, 2000

Federació d’Entitats per l’Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Problema 1

Para conmemorar el año 2000, Año Mundial de las Matemáticas, vamos a proponer algunas cuestiones relacionadas con el número 2000.

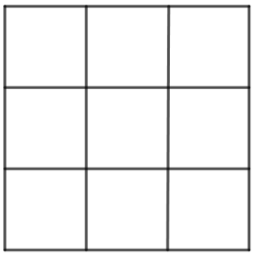
El número 2000 tiene muchos divisores, concretamente 20, y la suma de los mismos (sin contar el 2000) es superior a 2000, exactamente 2836. Esto posibilita que se pueda expresar 2000 como suma de algunos de sus divisores. Por ejemplo:

$$2.000 = 1.000 + 500 + 400 + 100$$

es la descomposición que utiliza el menor número de divisores.

A. ¿Sabrías expresar 2000 como suma de divisores, todos distintos, de manera que el número de términos fuera el mayor posible?

B. Coloca un número distinto en cada una de las nueve casillas del cuadrado de la figura de manera que el producto de los tres números de cada fila y de cada columna sea 2000.



Problema 2

Como bien habrás podido apreciar el logotipo de FEEMCAT está compuesto por 5 triángulos rectángulos que al unirse dan lugar a un pentágono regular interno y otro externo. Cada uno de los triángulos simboliza a cada una de las asociaciones de profesores que integran FEEMCAT.

A. ¿Sabrías determinar la amplitud de los ángulos de esos triángulos?

B. Si en vez de cinco fueran seis las asociaciones de profesores, ¿podría obtenerse una figura similar? ¿Cómo serían los ángulos del triángulo en este caso?

C. ¿Y si fueran siete u ocho? ¿Y para el caso general n?

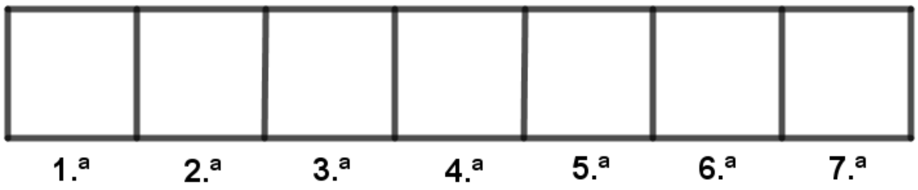
D. Encuentra una relación entre los ángulos de los triángulos y los ángulos del polígono regular que se representa en cada caso.

E. ¿Para qué número de asociaciones queda más bonito el logo?

Problema 3

Queremos colocar siete monedas en las casillas de la figura. Cada vez que colocamos una moneda debemos girar (cambiar la cara, *C,* por la cruz, *X,* o viceversa) todas aquellas ya colocadas que están conectadas con la moneda que colocamos. Dos monedas están conectadas si no hay ninguna casilla vacía entre ellas.

A. ¿En qué posiciones se deber ir colocando para realizar el mayor número de giros? ¿Cuántos giros de moneda se deben hacer?
B. ¿Cómo las colocamos (C o X) para que al final todas las monedas muestren la cara?
C. Si en lugar de 7 monedas queremos colocar 50 (en un tablero de 50 casillas), ¿cuántos giros de moneda se podrán hacer como máximo?



Problema 4

Alberto, Berta y Carlos comen juntos cada día. Al finalizar la comida cada uno de ellos pide beber té o café.

- Si Alberto pide café, entonces Berta pide lo mismo que Carlos.
- Si Berta pide café, entonces Alberto pide la bebida que no pide Carlos.
- Si Carlos pide té, entonces Alberto pide la misma bebida que Berta.

¿Cuál de ellos pide siempre la misma bebida después de comer?

XII OLIMPIADA NACIONAL

Cantabria 2001

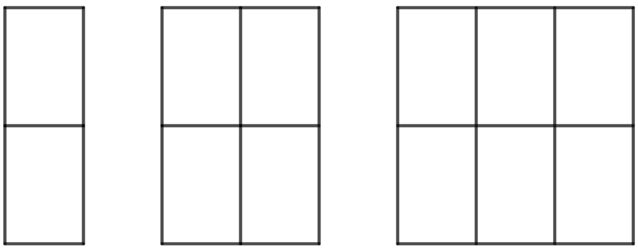
Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

Problema 1 Si la Tierra fuese una naranja

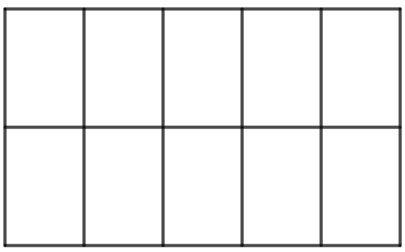
Rodea una naranja muy redonda con una cinta roja. Alarga después la cinta, de modo que rodee la naranja quedando a un metro de su superficie. Supón que pudieras hacer ahora lo mismo con la Tierra (supuesta esférica) con una cinta azul y luego la alargas de manera que rodee la Tierra quedando también a un metro de su superficie. ¿Cuál es el más grande de los alargamientos, el de la cinta roja alrededor de la naranja, o el de la cinta azul alrededor de la Tierra? Explica cómo has llegado a esa conclusión.

Problema 2 Contando rectángulos

En las siguientes figuras hay tres, nueve y dieciocho rectángulos respectivamente:



¿Cuántos rectángulos hay en esta otra figura?



Encuentra un procedimiento para poder contar el número de rectángulos que habría en las figuras resultantes, con seis, siete … columnas.

Problema 3 La participación astuta

Se trata de dividir esta esfera de reloj en seis partes, de forma que en cada una de ellas la suma de los números sea la misma.

Problema 4 Tanteo y paciencia

4.1.- Con atención, paciencia y con las cifras del 1 al 9, se pueden formar números de tres cifras cada uno. Desde luego puedes formar muchos, pero tienes que encontrar tres de ellos, de manera que, utilizando todas las cifras sin que se repita ninguna, cumplan que: el segundo número sea el doble del primero y el tercero el triple del primero.

¿De qué números se trata?

1.^{er} Número	2.° Número	3.^{er} Número

4.2.- Recuerda que un número primo es aquel número natural mayor que 1 que no tiene más divisores positivos que él mismo y el uno. Existen unos números primos muy curiosos ya que su valor es igual a una potencia de 2 menos 1.

Ejemplo: $3 = 2^2 - 1$; $7 = 2^3 - 1$; $31 = 2^5 - 1$; $127 = 2^7 - 1$ ...

Estos números primos se llaman números de MERSENNE. En 1994 el último número de MERSENNE encontrado era $2^{859433} - 1$, que tiene un total de 258.716 cifras. Gracias al avance de las tecnologías se han descubierto números de MERSENNE mucho mayores. El último encontrado es $2^{6972593} - 1$, que tiene 2.098.960 cifras.

¿Sabrías cuál es la cifra de las unidades de este último número primo? Explica el procedimiento que has seguido.

Problema 5 ¿Confías en el azar?

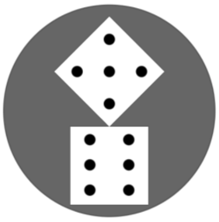
5.1.- Se tiene once galgos con dorsales numerados de 2 al 12, ambos inclusive.

Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores de ambos indica el galgo elegido, que avanza una FILA. Gana la carrera el galgo que llega primero a la FILA número 10.

a) Si tuvieras que elegir un galgo, ¿qué dorsal prefieres? ¿Por qué?
b) Haz una clasificación de cómo crees que llegarán a la meta los distintos galgos. Explícalo.

5.2.- Rafael y Noemí realizan un juego que consiste en lanzar al aire dos dados. Calculan el producto de los números que aparecen en las caras superiores. Si el producto sale par gana Rafael y si sale impar gana Noemí.

a) ¿Te parece justo el juego? ¿Por qué?
b) Si se repitiera el juego 360 veces, ¿cuántas veces crees que ganaría cada uno?




XIII OLIMPIADA NACIONAL

San Fernando, 2002

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Problema 1 No te cortes en las cortes

A principios del siglo XIX se convocan Cortes en la ciudad de San Fernando. Si la fecha de la convocatoria es dd-m-aaaa, se cumplen las siguientes propiedades:
- El único dígito que se repite, y sólo una vez, es el 1.
- La fecha contiene a todos los dígitos que son cuadrados perfectos.
- Si comenzamos por la izquierda, el segundo dígito es el cuadrado del primero.
- La suma de los dígitos también es un cuadrado perfecto.
- Si se considera la fecha como un número de 7 cifras (ddmaaaa, es decir, por ejemplo, la cifra del día de hoy sería 2762002), dicho número es divisible entre el primer dígito de la izquierda.

¿Cuál es la fecha en que se convocaron las Cortes?

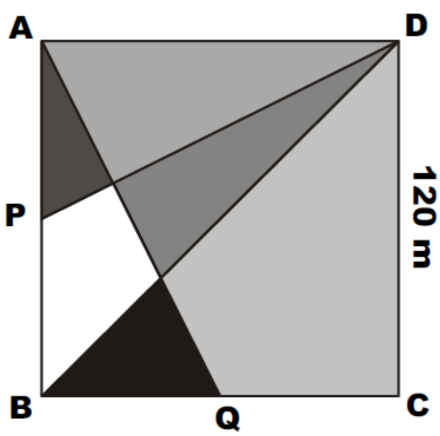
Problema 2 Un reparto geométrico

El conocido matemático don Pepe Cuadrado ha dejado en herencia a su esposa y a sus cinco hijos una finca cuadrada de 120 m de lado para que se la repartan según las siguientes indicaciones:

Siendo P y Q los puntos medios de los segmentos AB y BC respectivamente, se trazan los segmentos DP, DB y AQ, con lo que la finca queda dividida en 6 partes.

La mayor parte es para la esposa, la que le sigue en superficie para el mayor de los hijos, la siguiente para el segundo y así hasta la parte más pequeña que será para la hija menor.

Determina el área de cada región y la asignación de las seis partes.



Problema 3 ¡Por fin vacaciones!

a) Mientras espera ansiosamente a que lleguen las vacaciones, Pepito Pinto ha observado que si en el almanaque recorta un cuadrado que contenga nueve días y suma los nueve números contenidos, curiosamente se obtiene siempre un múltiplo de nueve. ¿Sabrías demostrar razonadamente por qué?

b) Al sumar los 9 números de un trozo de estas características de una hoja cualquiera de un calendario, se ha obtenido un múltiplo de 7. Averigua de qué números se trata sabiendo que el más pequeño es primo.

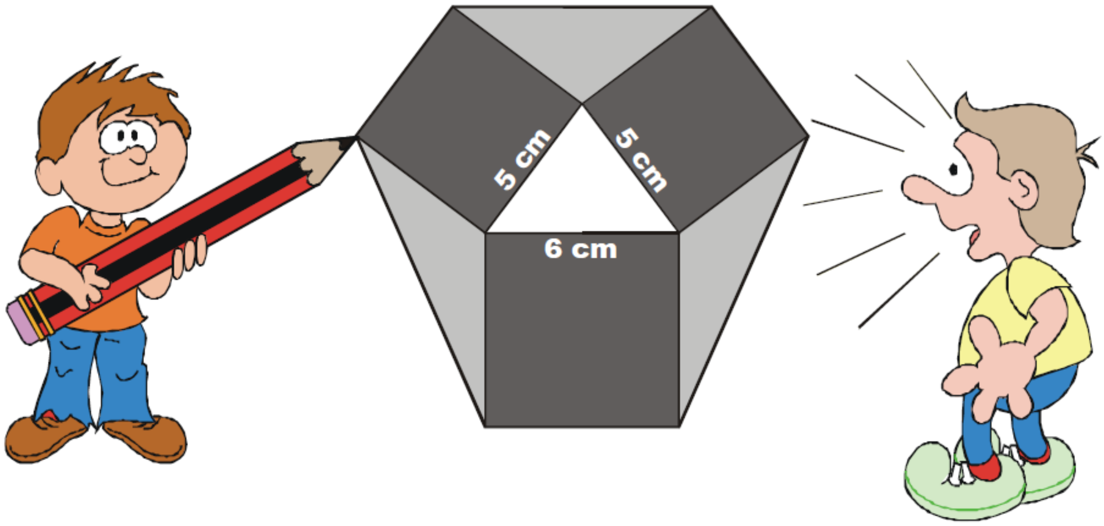
2002	L	M	M	J	V	S	D
JUNIO						1	2
	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27	28	29	30

Problema 4 Un hexágono muy particular

A partir de un triángulo isósceles de lados 5, 5 y 6 cm, construimos un hexágono de la siguiente manera:

1. Construimos sobre cada lado un cuadrado.
2. Unimos los vértices "vecinos" de cada cuadrado.

Y ya tenemos un hexágono como el de la figura. Pues bien, calcula su área.

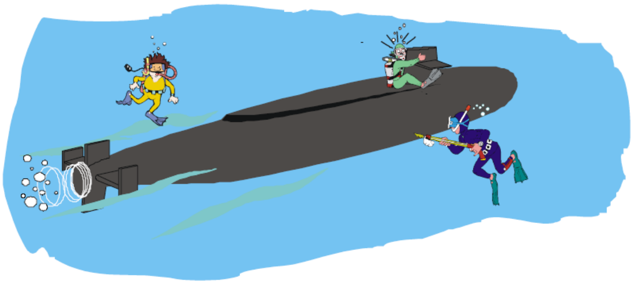


Problema 5 Hundir la flota (II)

En la feria de Matelandia se prepara la gran final de "Hundir la flota II" en la que se enfrentarán Paquito Cabezas y Fernando el Ingenioso.

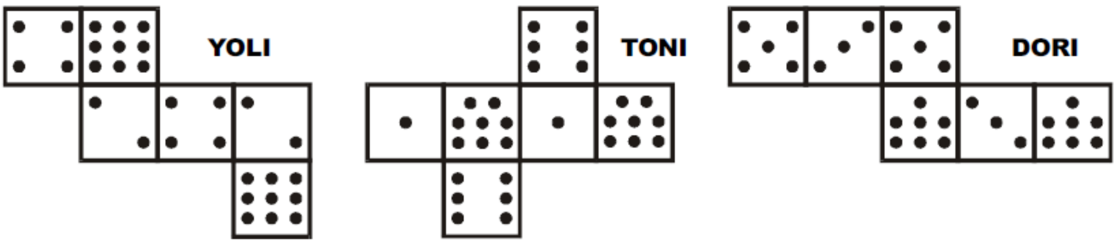
El juego es una variante del que seguramente conocerás. En esta nueva versión cada jugador debe colocar un submarino en una casilla de un tablero 8x8 e intentar hundir el submarino (1x1) del contrario antes de que éste hunda el tuyo. Los jugadores van efectuando sus disparos por turnos alternos y tras cada disparo, el jugador acosado debe informar de la distancia, medida en casillas horizontales y verticales (o viceversa), desde la zona del disparo hasta su submarino.

Paquito está entrenándose concienzudamente y ha conseguido una estrategia inmejorable. ¿Sabrías descubrir esta estrategia? ¿Cuántos disparos serán necesarios como máximo para terminar con el submarino del contrincante?



Problema 6 Dados en La Barrosa

Yoli, Toni y Dori veranean en la chiclanera playa de La Barrosa. Una tarde, mientras hacen la digestión del bocata de tortilla, los tres amigos juegan lanzando sus particulares dados sobre la toalla de Yoli. Los desarrollos de cada uno de los dados son los siguientes:



En cada partidilla lanzan sus dados los dos amigos que se enfrentan y gana quién obtiene más puntos. Pues bien:

a) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Yoli y Toni?

b) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Toni y Dori?

c) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Dori y Yoli?

d) Como Yoli es más alta que Toni y Toni más alto que Dori, obviamente Yoli es más alta que Dori. ¿Se cumple esa lógica en el juego anterior? ¿Podrías elegir entonces uno de los tres dados para tener más posibilidades de triunfar?

XIV OLIMPIADA NACIONAL

Logroño, 2003

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «Aprima»

Problema 1 Torneo “Garnacha” de fútbol

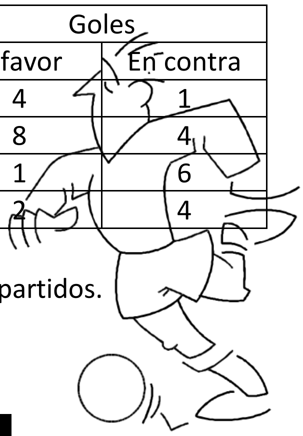
En el torneo veraniego “Garnacha” de fútbol participaron cuatro equipos: el Menisco C.F., el Real Broncas, el Patadín Deportivo y el Garnacha Atlético.

El torneo se disputó por el sistema de liguilla: cada equipo jugó un partido contra los otros tres.

Los aficionados recuerdan de forma muy especial este torneo no solo porque el club organizador se hizo una vez más con el trofeo, sino también porque no hubo dos partidos que terminaran con el mismo resultado.

La tabla de la competición quedó así:

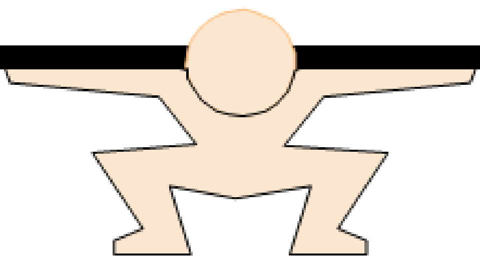
	Partidos				Goles	
	Jugados	Ganados	Empatados	Perdidos	A favor	En contra
Garnacha	3	2	1	0	4	1
Patadín	3	2	0	1	8	4
Menisco	3	1	0	2	1	6
Broncas	3	0	1	2	2	4



Averigua razonadamente cuáles fueron los resultados de los seis partidos.

Problema 2 De cuadrados y cincunferencias inscritas

En un cuadrado de vértices A, B, C y D cuyo lado mide 2 dm trazamos la diagonal AC; después trazamos las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABC, cuyos centros son respectivamente los puntos E y F. Clasifica el cuadrilátero AFCE y halla su área.



Problema 3 Números de “Atila”

A partir de este histórico momento, llamaremos “números de Atila” (no sé por qué se me ha ocurrido ese nombre) a los siguientes:

Atila = { 1 , 11 , 111 , 1111 , ... }

Considera los diez primeros “números de Atila” (cuidado con el 111 porque es el peor, ya que empieza con uno, sigue con uno... y acaba con uno).

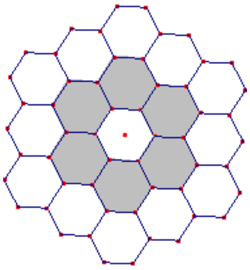
¿Cuántos hay que sean múltiplos de 11?; ¿cuántos son múltiplos de 3?; ¿cuántos “1” tienes que utilizar si escribes los 10? ¿Y si en vez de los diez primeros, tuviésemos los 1000 primeros números de Atila? (no se te vaya a ocurrir escribirlos todos...)

Problema 4 Embaldosar con hexágonos

Se tiene un hexágono regular en el plano.

▪ Operación 1: Se rodea colocando alrededor hexágonos iguales a él. Hay 1 + 6 = 7 hexágonos.

▪ Operación 2: Se rodea esta estructura con hexágonos iguales.



Ahora hay 1 + 6 + 2 x 6 = 19 hexágonos.

Se repite esta operación.

▪ ¿Cuántos hexágonos hay después de la operación 4?

▪ ¿Puedes decir cuántos hay después de la operación 100?

▪ ¿Cuántos hay después de la operación *n*?

Después de la operación *n*, queremos poner dos euros en cada vértice de orden 2 (es decir donde se corten dos aristas), y tres en cada uno de orden 3. ¿Cuántos euros necesitamos en total?

<u>Problema 5</u> Maratón de preguntas

Elegir la respuesta correcta entre las opciones que se dan en cada una de las preguntas:

1.- Si un recipiente cúbico tiene una capacidad de 64 *cl*, su arista interior mide:
A) 4 *mm* ; B) 4 *cm* ; C) 4 *dm* ; D) 4 *m* ; E) Nada de lo anterior

2.- Tomando como vértices cuatro puntos de esta trama cuadrada, ¿cuántos cuadrados distintos pueden construirse?
A) 17 ; B) 30 ; C) 39 ; D) 49 ; E) Más de 49

3.- La cifra de las unidades de $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2003}$ es:
A) 1 ; B) 3 ; C) 5 ; D) 7 ; E) 9

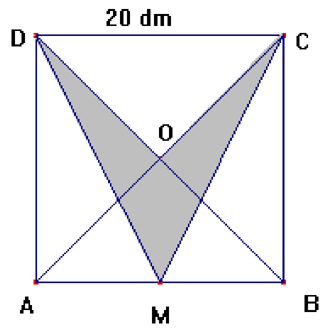
4.- El actual balón de fútbol es un icosaedro truncado. Se obtiene a partir de un icosaedro, suprimiendo en cada vértice del mismo una pirámide pentagonal, de forma que por cada uno de los 12 vértices del icosaedro aparezca un pentágono y que cada una de las 20 caras del primitivo icosaedro quede reducida a un hexágono regular. Su número total de aristas es:
A) 180 ; B) 90 ; C) 100 ; D) 80 ; E) Nada de lo anterior

5.- ¿Cuántos números naturales menores que 500 son divisibles por 6 o por 8 pero no son divisibles por ambos a la vez?
A) 145 ; B) 140 ; C) 105 ; D) 130 ; E) 125

6.- En un rectángulo aumentamos la base y disminuimos la altura de forma que su área no varía. Si la base se aumentó en un 25%, entonces la altura disminuyó un:
A) 20% ; B) 25% ; C) 40% ; D) 80% ; E) Faltan datos

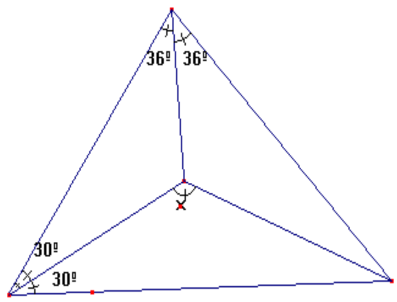
7.- Uno de estos volúmenes es diferente de los demás. ¿Cuál es?
A) 53 m^3 ; B) $5'3.10^4$ *l* ; C) $5'3.10^7$ cm^3 ; D) $5'3.10^8$ mm^3 ; E) 530 *hl*

8.- Si ABCD es un cuadrado de 20 *dm* de lado, M es el punto medio de AB y O es el centro del cuadrado, entonces el área (en dm^2) del cuadrilátero DMCO sombreado en la figura es:
A) 80 ; B) 100 C) 120 ; D) 150 ; E) 180



9.- ¿Cuál de estos números está justo en medio de $0'\hat{7}$ y $0'\hat{8}$?
A) $0'\widehat{75}$; B) $0'8\hat{3}$; C) $0'75$; D) $0'775$; E) Nada de lo anterior

10.- ¿Cuánto mide el ángulo *x* de la figura?
A) 110° ; B) 115° ; C) 120° ; D) 126° ; E) 130°

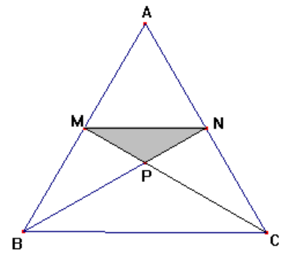


11.- Arturo lanza dos veces una moneda. Por cada cara obtiene 2 puntos, por cada cruz 1 punto. Benito lanza un tetraedro con las caras numeradas de 1 a 4.
¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan la misma puntuación?
A) 3/4 ; B) 1/2 ; C) 1/3 ; D) 1/4 ; E) Nada de lo anterior

12.- ¿En cuántos ceros termina el producto $120^3 \cdot 250^4$?
A) 7 ; B) 9 ; C) 11 ; D) 13 ; E) 15

13.- Un año se llama "Año Santo Compostelano" si el 25 de julio de dicho año cae en domingo. ¿Cuál es el máximo número de años que puede haber entre dos Años Santos Compostelanos consecutivos *(sin que haya por medio un cambio de siglo atípico)*?
A) 5 ; B) 6 ; C) 7 ; D) 10 ; E) 11

14.- Si ABC es un triángulo equilátero de 12 cm de lado, M y N los puntos medios de AB y AC , y P es el punto de intersección de CM y BN, entonces el área del triángulo MNP, en cm^2, es:
A) $3\sqrt{3}$; B) $6\sqrt{3}$; C) $4\sqrt{3}$; D) $12\sqrt{3}$; E) $5\sqrt{3}$



15.- Un albañil necesita 10.000 ladrillos para cierto trabajo. Por su larga experiencia sabe que no más del 7% de los que le traigan se le van a romper. Si los ladrillos vienen en cajas de 100, ¿cuál es el mínimo número de cajas que debe pedir para estar seguro de acabar el trabajo?
A) 109 ; B) 106 ; C) 105 ; D) 107 ; E) 108

16.- En un grupo de hombres y mujeres la edad media es de 31 años. Si la media de edad de las mujeres es 25 años y la de los hombres 35 años, entonces la razón nº de hombres / nº de mujeres es:
A) 5/7 ; B) 7/5 ; C) 2/1 ; D) 4/3 ; E) 3/2

17.- Dos jarras idénticas están llenas de una mezcla de aceite y vinagre en la proporción de 2 a 1 en una de ellas y de 3 a 1 en la otra. Si vaciamos ambas jarras en una grande, la proporción de aceite y vinagre de la mezcla es
A) 5 a 1 ; B) 12 a 5 ; C) 17 a 7 ; D) 6 a 5 ; E) 5 a 2

18.- Como llueve, dos amigos, Ángel y Benito, deciden pasar la tarde viendo películas en vídeo. En el mismo vídeo-club Ángel alquila tres vídeos y Benito dos. Cuando otro amigo, Carlos, decide sumarse a la vídeo-sesión, dice Ángel:
-No alquiles más películas, que ya tenemos cinco. Pon 4 euros y los repartiremos entre Benito y yo de forma que todos hayamos puesto lo mismo.
¿Qué cantidad –en euros- corresponde a Benito?
A) 1'60 ; B) 1'50 ; C) 1'20 ; D) 1 ; E) 0'80

XV OLIMPIADA NACIONAL

Melilla, 2004

Sociedad Melillense de Educación Matemática

Problema 1 Galáctico Español

Pau Gasol, nuestro famoso jugador de baloncesto, está triunfando en la liga profesional americana NBA. En un entrenamiento su porcentaje de tiros libres acertados ha sido de 83,3333… por ciento.

a) ¿Cuántos tiros encestó en 60 lanzamientos?
b) ¿Cuál debe ser el mínimo número de lanzamientos para poder conseguir este porcentaje?
c) ¿Cuántos encestó en este caso?

Para finalizar el entrenamiento, Gasol prueba 10 tiros adicionales y encesta 6. Calcula el porcentaje de canastas de los 70 tiros que ha lanzado.

Problema 2 Números dabuten

Mira tú por dónde, vamos a llamar números "dabuten" a aquellos enteros positivos que cumplan la condición de que la suma de sus cifras coincida con nuestra edad. Para que se entienda: si una persona tiene 14 años, el 167, el 1094 o el 12341111 son algunos de sus números "dabuten" porque la suma de sus cifras es 14.

¿Cuántos números "dabuten" de 2 cifras tendrá Carmelo Cotón, sabiendo que acaba de cumplir 14 años?

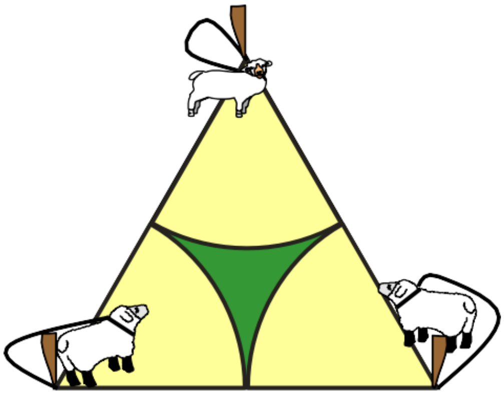
Si elijo un número al azar de 2 cifras (entre el 10 y el 99), ¿qué edad tiene más posibilidades de que ese sea uno de sus números "dabuten"?

Problema 3 Ovejas hambrientas

Un terreno que tiene forma triangular regular y de lado la unidad está sembrado de alfalfa y en cada vértice del mismo se colocan, para que pasten, tres ovejas amarradas de tal forma que llegan sólo a la mitad del lado del triángulo. Al cabo de un buen rato solo queda hierba en parte del terreno sembrado, tal y como se indica en la parte sombreada de la figura adjunta.

Calcula la superficie de la parte que queda con hierba.

¿Cuál es el perímetro de esta zona que queda con pasto?

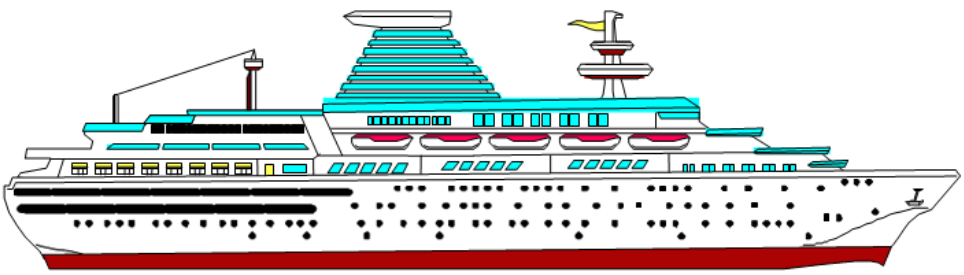


Problema 4 Enigma en el barco de Málaga

En el barco que hace el viaje Málaga - Melilla, el capitán, el comodoro y el maquinista se llaman LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO, pero no respectivamente. También viajan en el barco tres hombres de negocios que se llaman de la misma manera: El señor LÓPEZ, el señor GARCÍA y el señor CASTILLO.

a) El señor GARCÍA vive en Almería.
b) El comodoro vive a mitad de camino entre Málaga y Almería.
c) El señor CASTILLO gana exactamente 20000 € al año.
d) El vecino más próximo del comodoro, que es uno de los tres pasajeros, gana exactamente tres veces más que él.
e) LÓPEZ gana al capitán al billar.
f) El pasajero cuyo nombre es igual al del comodoro vive en Málaga.

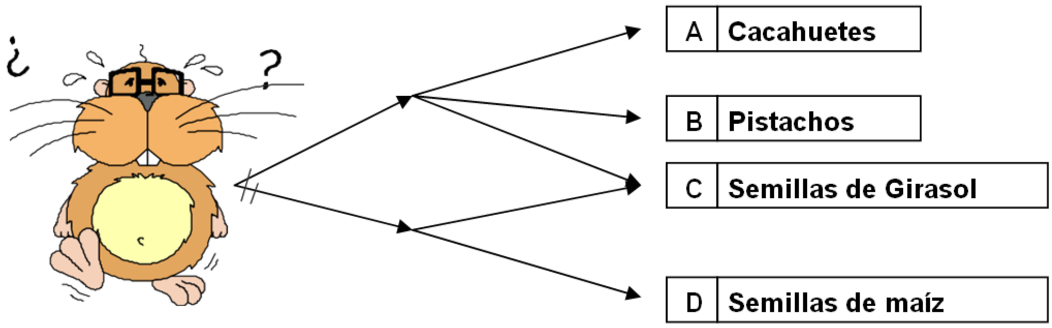
¿Cómo se llama el maquinista?



Problema 5 Hámster indeciso

Un hámster, para llegar a sus alimentos preferidos, ha de elegir entre los caminos que conducen a las cuatro salidas: A, donde están los cacahuetes; B, en la que hay pistachos; C, que tiene semilla de girasol y D, en la que hay semillas de maíz.

Averigua, fijándote en el gráfico de abajo, las probabilidades que tiene de llegar a cada una de esas salidas y a cuál llegará con más probabilidad.



Problema 6 Baile agotador

Cien personas participan en un baile. Durante la velada una dama bailó con siete caballeros, otra segunda dama bailó con ocho caballeros, una tercera dama con nueve y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos.

¿Cuántas damas había en el baile?

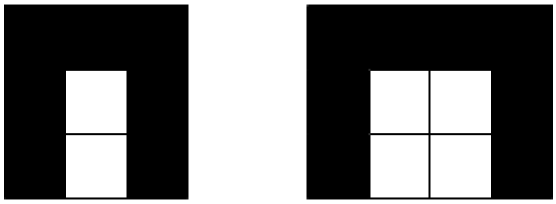
XVI OLIMPIADA NACIONAL

Madrid, 2005

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Caltelnuovo»

Problema 1 Las baldosas

Fíjate en las siguientes figuras y analiza el modo en el que vamos construyendo cada una de ellas a partir de la anterior.



Expresa la cantidad de baldosas blancas y negras que tendremos cuando en la primera fila tengamos un número cualquiera "*n*" de baldosas negras. Aplícalo para indicar la cantidad de baldosas de cada uno de los tipos, que tendríamos en la vigésima figura construida siguiendo este proceso de formación.

Una vez hecho esto, utiliza los resultados anteriores para obtener en cuál de las figuras se da la situación en la que, la cantidad de baldosas negras y blancas sea la misma.

Problema 2 El jugador de cartas

Ayer jugué a las cartas, pero no te voy a decir si perdí o gané dinero. Lo tienes que averiguar con las pistas que te doy:

- Mis ganancias o pérdidas se obtienen sumando siete números.
- Una vez colocados en fila, cada número y su simétrico respecto al del centro suman 9.
- El segundo número, es el primero menos uno, mientras que el tercero es el segundo menos uno.
- El producto del primero por el tercero es 24.
- El cuarto, es igual a la suma del segundo más el tercero.

Con estas pistas averigua si gané o perdí dinero y cuánto.

Problema 3 El número misterioso

Halla un número sabiendo que se trata del mayor número de siete cifras, divisible entre cada una de ellas y en el que ninguna cifra de las que lo componen se repite.

NOTA: *Te recomendamos que en la resolución de este problema te ayudes de la calculadora.*

Problema 5 Curiosos y preguntones

Como todo el mundo sabe, en *Cuestionlandia* sólo hay dos clases de personas: los preguntones, que sólo hacen preguntas cuya respuesta ya saben y los curiosos, que sólo hacen preguntas cuya respuesta no saben.

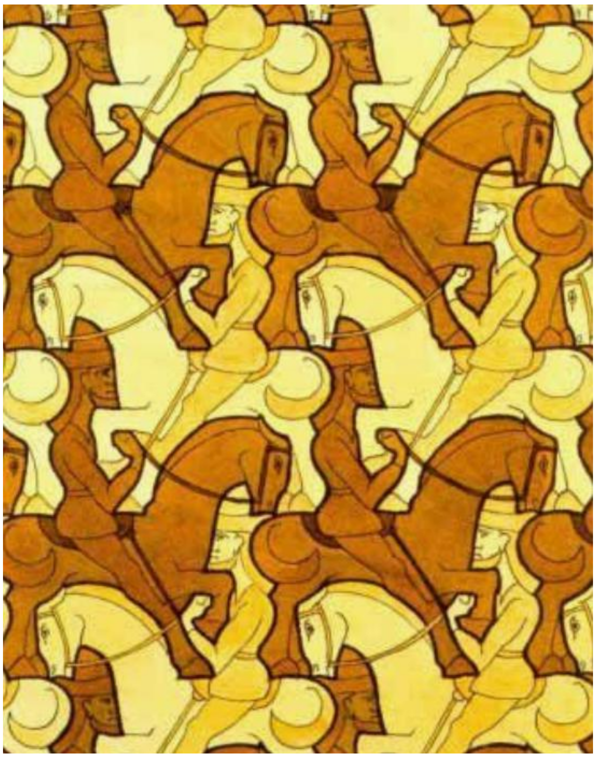
Tres personas se juntan en una cola. No se conocen de antes pero saben que son de esta curiosa región. Se oye la siguiente conversación:

- Entre nosotros tres ¿hay algún preguntón?, dice el primero.
- ¿Es usted preguntón? Dice el segundo dirigiéndose al tercero.
- Entre nosotros tres ¿hay algún curioso? pregunta el tercero.

¿Podrías decirnos de qué clase es cada uno?

Problema 4 Mosaico de Escher

Con la ayuda de una regla y tu imaginación, calcula el área de las baldosas que forman el mosaico de la siguiente figura.



XVII OLIMPIADA NACIONAL

Villafranca de lo Barros, 2006

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

Problema 1 Atraco

Tras atracar la Cooperativa de Aceite Villafranca, los ladrones huyen en un coche que les esperaba con el motor en marcha. La policía recaba datos para identificar la matrícula del coche. Uno de los empleados se ha fijado en que ninguna de las cuatro cifras era cero. Otro se fijó en que las dos primeras cifras eran iguales y las dos últimas también, pero distintas de las anteriores. El más sagaz de los empleados se fijó en que el número de la matrícula es un cuadrado perfecto.

Con estas pistas la policía intenta averiguar la matrícula, pero no lo consigue. ¿Podrías tu ayudarles?

Problema 2 Numeracos

Explica cómo se puede obtener y obtén el resultado de las siguientes operaciones:

F. $237.456.823^2 – 237.456.824 \times 237.456.822$
G. $237.456.823^2 – 237.456.833 \times 237.456.813$

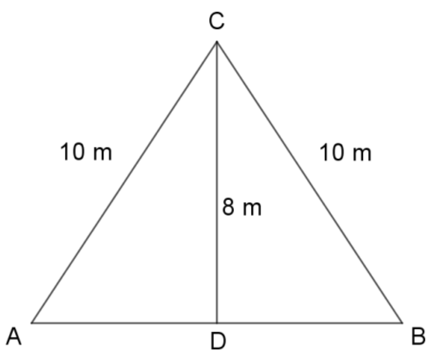
Problema 3 Albergue

En un albergue juvenil de verano las habitaciones son de cuatro camas, las mesas del comedor de seis plazas y las aulas para las actividades tienen nueve puestos cada una. Entre habitaciones, mesas del comedor y aulas suman 57.

¿Cuántos jóvenes pueden albergarse para que la ocupación sea total?

Problema 4 Triángulo

El triángulo isósceles ABC, con CA = CB, tiene 8 m de altura y los lados iguales miden 10 m cada uno.



a) Calcula la distancia AB.

b) Halla la suma de las distancias del punto medio D de la base a los lados AC y BC.
c) Si tomas un punto P del lado AB situado a 4 m de A, ¿cuánto valdrá la suma de las distancias desde P a los lados AC y BC?
d) ¿Cómo ha de elegirse un punto en la base AB para que la suma de las distancias a los lados AC y BC sea la menor posible?

Problema 5 Rectas

Si trazas una recta en el plano, éste se divide en dos zonas.

Si trazas dos rectas secantes, aparecen cuatro regiones.

Si trazas tres rectas, secantes dos a dos y sin que se corten más de dos en un mismo punto, ¿cuántas regiones se forman?

Y si en las mismas condiciones de antes trazaras cuatro rectas ¿cuántas regiones se formarían?

Fijándote en los resultados anteriores, si se supone que k es el número de regiones formadas al trazar n rectas, explica cuántas habrá si las rectas son $n+1$.

XVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA

Puente de la Reina y Pamplona, 2007

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»

Matematika Iraskasicen Nafar Elkartea Tornamira

Problema 1 Lío de puertas

El Reverendo Charles Dogson, matemático, escritor y fotógrafo en sus ratos libres, nos propuso el siguiente ejercicio:

Una plaza cuadrada tiene 20 puertas en cada lado de modo que lo dividen en 21 partes iguales. Todas las puertas están numeradas correlativamente empezando de una esquina. Si consideramos las puertas de número 9, 25, 52 y 73, ¿desde cuál de ellas es menor la suma de las distancias a las otras tres?

Problema 2 Va de juegos

Disponemos de un tablero formado por 8 casillas cuadradas puestas en fila.

Dos jugadores, A y B, van a practicar el siguiente juego: Cada vez que sea el turno de un jugador tiene que tachar una de las casillas que no esté eliminada. Una casilla resulta eliminada si está tachada o está al lado de una casilla tachada.

El primer turno es para el jugador A, y al final de la partida resulta ganador quien tacha la última casilla posible.

Demuestra que, si juega adecuadamente, el jugador B puede ganar siempre.

Problema 3 La invitación

El señor y la señora Fernández invitaron a cenar a otros tres matrimonios. A la llegada, antes de empezar a cenar, se saludaron con algunos apretones de manos. Como es lógico nadie saludó a su esposo o esposa ni a sí mismo ni dio la mano a la misma persona más de una vez.

Al sentarse a la mesa, el señor Fernández preguntó a cada persona, incluida su esposa, a cuántos de los asistentes había dado la mano. Para su sorpresa, cada uno de los invitados le dijo una cantidad diferente. ¿A cuántas personas dio la mano la señora Fernández? (Posiblemente el uso de un gráfico os resulte de ayuda).

Problema 4 Trenes que se cruzan

En una vía férrea de recorrido circular, desde la estación terminal cada quince minutos sale un tren en dirección este y otro en dirección oeste. El que va hacia el este completa el recorrido en 3 horas y el otro en 2 horas. Dos viajeros, Charles y Lewis, salen a la misma hora en direcciones opuestas.

¿Con cuántos trenes se encontró cada uno de los viajeros en su recorrido sin contar el que sale y el que llega a la vez que el suyo?

¿Cuántos trenes se encontró cada viajero después de cruzarse con el que había salido a la vez que el suyo?

Problema 5 Termómetro

Un termómetro defectuoso marca +1° al fundirse el hielo y +106° para el vapor del agua hirviendo. Cuando marca +17° ¿Cuál es la temperatura real?

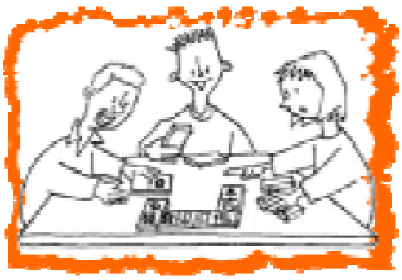
Problema 6 Sumas y productos

El número 40 puede descomponerse en suma de números naturales de 2^{39} maneras distintas.

Algunas de ellas son: 40 = 2+2+5+5+6+10+10 = 6+6+6+6+6+10

No vamos a pedirte que nos escribas todas las descomposiciones posibles. Sin embargo, si te fijas en el producto de los sumandos de cada una de las descomposiciones, es diferente: En el primero de los casos el producto es 60 000, y en el segundo 77 760.

Lo que te vamos a pedir es que, razonadamente, encuentres de entre todas las descomposiciones posibles del número 40 como suma de números naturales, iguales o distintos, aquélla que dé como producto de sus sumandos el mayor número posible.



XIX OLIMPIADA MATEMÁTICA

Murcia, 2008

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia

Problema 1

Habrás observado que los productos que se encuentran en los comercios, incluidos los libros, llevan un código de barras que permite su identificación. Formando parte de este código aparece un número de 13 dígitos que corresponde a ese producto.

1 234567 890128

Este número está formado por varios bloques de dígitos que representan la zona geográfica, la empresa y el producto concreto. El último dígito es lo que se denomina un «dígito de control», ya que sirve para detectar algunos de los errores que pueden producirse durante el manejo de dicho número como, por ejemplo, equivocarse al introducir uno de los dígitos o intercambiar dos dígitos consecutivos.

Para determinar el dígito de control correspondiente se calcula la suma de todas las cifras que, de izquierda a derecha, ocupan un lugar par, se multiplica el resultado por 3 y se le suman todas las cifras que ocupan un lugar impar; el dígito de control es el número que hay que sumar a este total para que sea múltiplo de 10.

Por ejemplo, como las doce primeras cifras del código anterior son 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2,

$$3 \times (2 + 4 + 6 + 8 + 0 + 2) + (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 1) = (3 \times 22) + 26 = 66 + 26 = 92$$

el dígito de control que le corresponde es el 8 (92 + 8 = 100) y el número completo es el que se ve en la figura.

El ISBN actual de cada libro funciona de la misma manera.

a) En el ISBN de un libro, 9 7 8 8 4 2 3 9 6 8 █ 4 5, su antepenúltima cifra está borrosa, ¿qué cifra será? (No olvides que el 5 es el dígito de control).

b) Tenemos un libro en cuyo ISBN, 9 7 8 9 5 8 7 0 4 3 6 █ 6, la penúltima cifra está borrosa, ¿podemos saber qué cifra es la que debería aparecer? (No olvides que el último 6 es el dígito de control).

c) Las doce primeras cifras del ISBN de la *Ortografía de la Lengua Española*, de la Real Academia Española, que tenemos en nuestra biblioteca son 9 7 8 8 4 2 3 9 9 2 5 0

- ¿Qué dígito de control le corresponde?
- ¿Cambiaría el dígito de control si se intercambian las dos últimas cifras del número anterior?
- ¿Puedes poner otros ejemplos diferentes en los que el intercambio de dos cifras no haga variar el dígito de control?
- ¿En qué casos, al intercambiar dos cifras, no varía el mencionado dígito de control?

Problema 2

Si entras a Murcia por la zona norte lo harás por la Avenida D. Juan de Borbón, en la que se encuentra la Plaza de los Cubos, llamada así porque en ella hay un conjunto de tres cubos con un peso de 20 toneladas, una altura de 10 metros y un coste total de 35 millones de las antiguas pesetas.

La Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia proyecta colocar, delante de su puerta, una estructura similar al cubo exterior de esa plaza. Quieren que tenga 3 m de lado y lo van a construir con listones de madera de sección cuadrada de 20 cm de lado.

a) ¿Qué longitud total de listón se utilizará en la construcción del cubo? Explica cómo lo calculas.

b) Si la madera utilizada tiene una densidad de 600 kg/m^3, ¿cuánto pesará la escultura?

c) Para protegerla del sol y la lluvia la quieren recubrir toda la madera (incluso la parte que descansa en el suelo) con una lámina plastificada adhesiva. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitarán?

Problema 3

Un *Matemago* propone durante su actuación las siguientes cuestiones:

a) Primero nos dice que ha pensado un número natural; lo ha multiplicado por 6; al resultado le ha restado 4; luego ha dividido entre 2; a lo que le ha dado le ha restado 8; y finalmente ha sumado 35. Como resultado ha obtenido el número 40. ¿Puedes decir qué número pensó el *Matemago*?

b) Ahora el *Matemago* piensa de nuevo un número. Le suma el triple de su consecutivo, le añade 21 al resultado y, finalmente, calcula la mitad de lo que ha obtenido. El resultado final es el triple del número inicial, ¿puedes decir qué número pensó el *Matemago*?

A continuación el *Matemago* invita al público a que le plantee cuestiones a él. Una de las personas le propone lo siguiente:

c) «He pensado un número, le he sumado el triple del número pensado, después he sumado 12 a lo que me dio, y el resultado lo he dividido entre 2. Finalmente he restado el doble del número pensado al principio. El resultado final ha sido 6. Adivina el número que pensé al principio».

Otro de los asistentes le propone al *Matemago*:

d) «Piensa un número natural cualquiera; súmalo consigo mismo; a lo que obtengas súmale 15; divide el resultado entre 3; finalmente resta el número pensado al principio. Dime qué número natural obtienes y yo te diré qué número pensaste».

¿Qué opinas de estos dos aprendices de mago? ¿Qué puedes decir de cada una de estas dos propuestas?

Problema 4

El alcalde de Cubilandia quiere adornar el jardín de la ciudad con una escultura, formada toda ella por cubos, en clara alusión al nombre de la ciudad.

El artista encargado toma 64 bloques cúbicos de cemento de 1 metro de lado y los coloca, como se indica en la figura 1, formando un gran cubo que descansa en el suelo. Una vez colocados pinta todas las caras visibles con pintura roja.

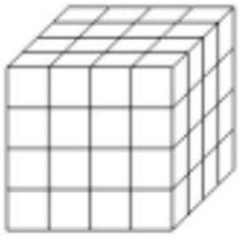


fig 1

a) Antes de presentar el trabajo al alcalde lo enseña al concejal de urbanismo quien, como la ve demasiado sencilla, le sugiere que traslade los cubos de las cuatro esquinas al centro de la cara superior, como se indica en la figura 2.

Al hacerlo, lógicamente, quedan al descubierto zonas sin pintar que deberán cubrirse de pintura. Si el artista se limita a trasladar (sin girarlos) los cuatro cubos a su nueva posición ¿Cuántos metros cuadrados deberá pintar para que quede, de nuevo, toda la escultura roja? Razona la respuesta.

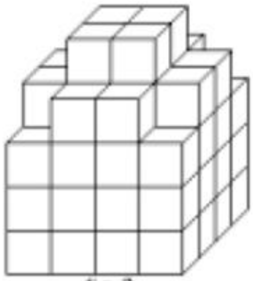


fig 2

b) No obstante, <u>antes de empezar a pintar de nuevo</u>, decide mostrarla al alcalde, quien opina que la escultura quedaría mucho mejor colocando los cuatro cubos que se han movido en el centro de cada una de las caras laterales, como se muestra en la figura 3. De hacerlo así, nuevamente trasladando sin girar nada, ¿cuántos metros cuadrados es necesario pintar?

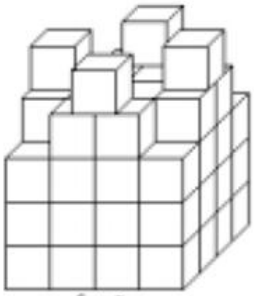


fig 3

c) Dando por definitiva esta última versión de la escultura, el artista observa que, si antes de pintar las zonas descubiertas, gira algunos cubos para aprovechar al máximo las caras ya pintadas del cubo original, se ahorra pintura. ¿Qué cubos hay que girar y cómo hay que hacerlo para que el número de metros cuadrados que haya que pintar sea mínimo? (Aclaración: se puede girar cualquiera de los 64 cubos aunque, naturalmente, solo debe hacerse un giro si con ello ahorramos pintura).

XX OLIMPIADA MATEMÁTICA

Tenerife, 2009

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Problema 1 Tetraedro Entero

A cada vértice de un tetraedro se le asigna un valor que puede ser +1 o -1. A cada cara se le asigna el valor resultante del producto de sus tres vértices.

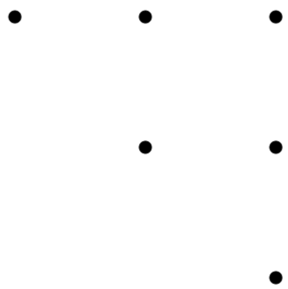
¿Es posible que la suma de las caras sea un número impar? ¿Por qué?

¿Puede ser esa suma cero en algún caso?

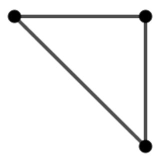
¿Qué valores puede tomar la suma de todas las caras?

Problema 2 Triángulos y geoplano

Se tiene un geoplano con la siguiente trama de puntos:



La distancia entre dos puntos consecutivos, tanto en horizontal como en vertical es de valor 1. Si unimos los puntos entre sí para formar triángulos:



¿Cuántos habrá de perímetro $2+\sqrt{2}$?

¿Cuántos de perímetro $2+2\sqrt{2}$?

¿Cuántos de $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$?

¿Cuántos triángulos se pueden formar, en total, con sus vértices en los puntos?

Problema 3 Las cosas de Mario

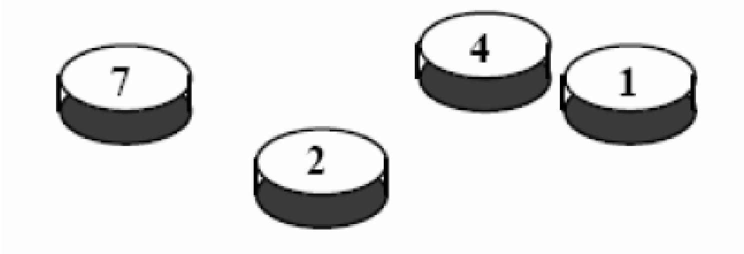
Mario quiere descomponer el número 46 en dos sumandos que sean números naturales, de tal manera que si uno se divide entre 7 y el otro entre 3, la suma de los cocientes es 10. ¿Cuál sería esa descomposición?

¿Y si la suma fuese 14?

Explicad cómo habéis encontrado vuestra respuesta.

Problema 4 Las fichas de Lucía

Lucía tiene cuatro fichas. Observa que sobre cada una de las ocho caras está indicado un número distinto, del 1 al 8. Ella lanza sus cuatro fichas una primera vez y ve aparecer 7, 2, 4 y 1, como está representado en el dibujo de aquí abajo.



Lucía lanza sus fichas una segunda vez y obtiene 6, 4, 5 y 2.

Después una tercera vez y obtiene 8, 2, 6 y 5.

Finalmente, la cuarta vez, obtiene 7, 4, 3 y 5.

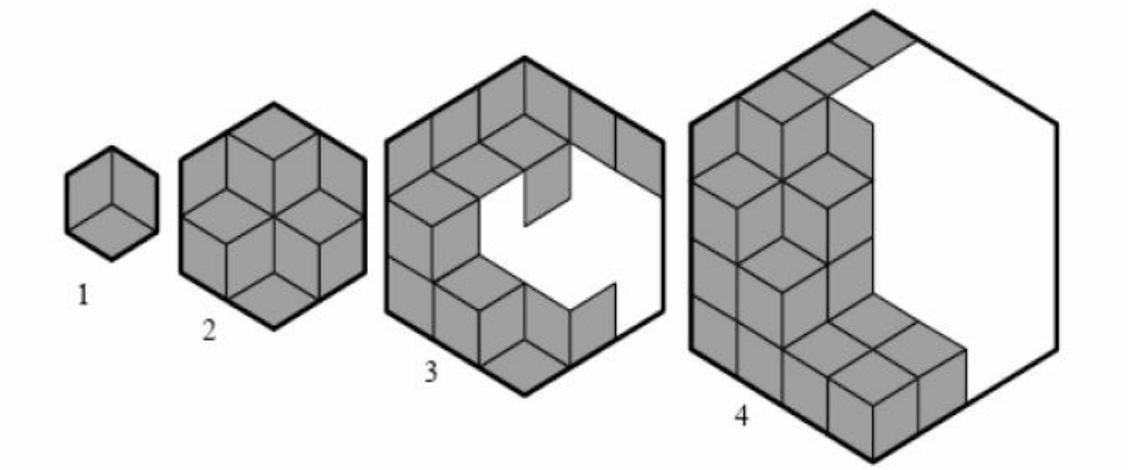
¿Cuáles son los números dibujados en cada ficha, uno sobre una cara y el otro sobre la opuesta?

Explicad cómo habéis hallado vuestra solución.

Problema 5 Los hexágonos de Pablo

Pablo tiene un juego con muchas piezas iguales para encajar, con forma de rombo con dos ángulos de 60 grados (60°).

Con estas piezas, Pablo construye hexágonos regulares. Para construir el hexágono más pequeño (dimensión 1), usa tres rombos. Para construir el siguiente (dimensión 2) usa doce y así sucesivamente (en el dibujo se ven los hexágonos completos de dimensión 1 y 2 con una posible disposición de los rombos, y el inicio de los hexágonos de dimensión 3 y 4):



¿Cuántos rombos necesitará Pablo para construir el hexágono de dimensión 8?

Explicad cómo habéis encontrado vuestra respuesta.

XXI OLIMPIADA NACIONAL

Palma de Mallorca, 2010

SBM-Xeix Societat Balear de Matemàtiques

Imagínate que el premio por haber concursado en esta olimpiada es un viaje a Nueva York para todo el grupo de participantes. La condición es que el viaje lo preparéis vosotros y solucionéis una serie de problemas. La siguiente tabla de datos adicionales os va a servir para resolver los problemas.

Datos adicionales:

Distancia aproximada Palma de Mallorca - Nueva York: 3925 millas terrestres.

Tasas aeropuerto (incluye ida y vuelta): 105 €

1 milla terrestre: 1,609 Km

Transformación de ºC a ºF: $t\,^{\circ}F = \frac{9}{5} \cdot t^{\circ}C + 32$

1 \$ = 0,7 €

1 pie = 0,3048 m.

Problema 1

Vamos a ser 58 estudiantes de 2º de ESO y hemos encontrado esta oferta:

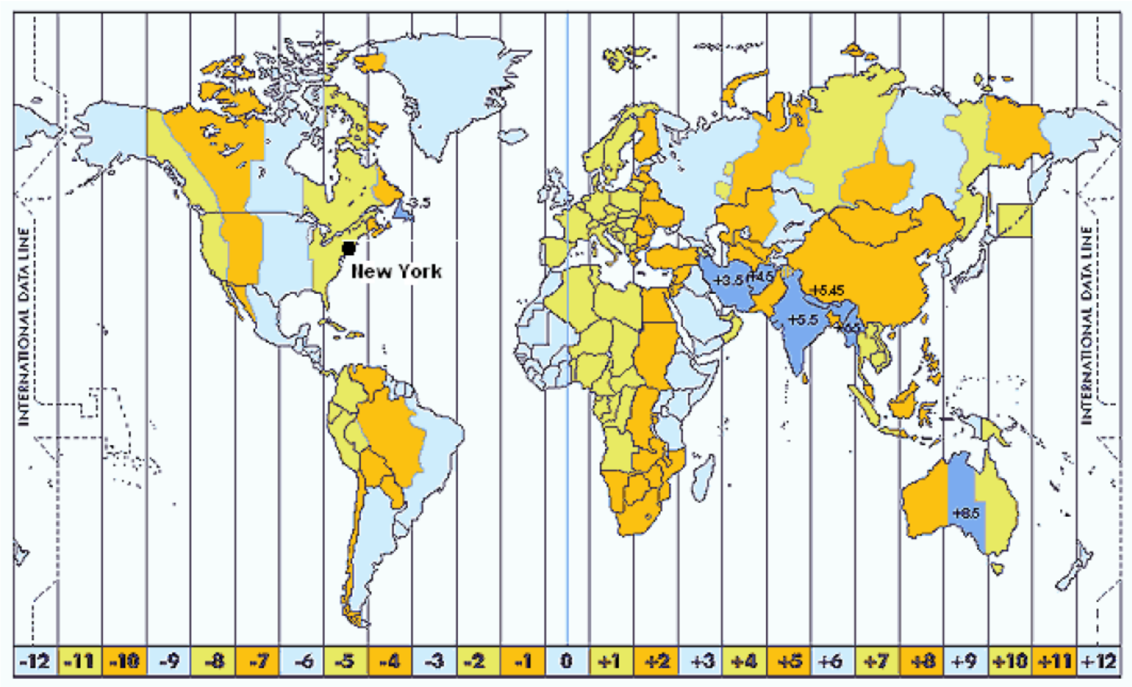
¿Cuánto costará el viaje por persona? En el precio tiene que estar incluida la ida y la vuelta. Exprésalo en euros.

Problema 2

¿Os habéis fijado que los grupos de 60 personas tienen descuento? ¿Sale rentable invitar gratis a dos de los organizadores de las olimpiadas?

Problema 3

Consulta el mapa de los husos horarios y calcula la duración del vuelo *OM-2010 Palma-Nueva York* que sale del aeropuerto de Palma de Mallorca a las 14:37 y llega a Nueva York a las 17:37 (hora local de Nueva York).



Problema 4

Durante el vuelo el piloto nos informa de la temperatura en Nueva York a la hora prevista de llegada: (11 · M – 13) grados Farenheit (°F), donde M es la solución del problema anterior. ¿Cuántos grados centígrados son?

Problema 5

Nueva York es una ciudad cuadriculada, donde las calles horizontales se enumeran desde la calle 1 hasta la calle 191 y las verticales van desde la avenida 1ª hasta la avenida 12ª. Hemos quedado con unos compañeros en un vértice de Central Park. Las indicaciones que nos han dado son: dirigíos a un cruce donde el número de avenida es un número primo (ATENCIÓN: 1 NO ES PRIMO) y el número de calle tiene dos cifras que son:

CALLE =	AVENIDA	AVENIDA + 4

y la suma de ambos es un cuadrado perfecto. ¿Podrías decir a qué cruce tenemos que ir?

A este punto lo llamaremos POSICIÓN A.

Problema 6

Una vez nos encontramos en la posición A, nos dicen que Central Park tiene forma de rectángulo y decidimos ir al vértice opuesto, que llamaremos POSICIÓN B, y que está situada en la intersección de la calle 110 con la avenida 8ª. Si la distancia aproximada entre dos calles es de 266 pies y entre dos avenidas es de 954 pies:

a) ¿Qué distancia deberíamos caminar para ir desde posición A hasta la B sin entrar en Central Park? (expresa la solución en pies).

b) ¿Cuál sería la distancia si pudiésemos andar en línea recta? (expresa la solución en metros).

Problema 7

Para ir desde la posición A hasta la posición B del problema anterior, decidimos coger un taxi. En Nueva York hay tres tipos de taxis. Los amarillos (que llamaremos Ta), los blancos (Tb) y los turísticos (Tt). Las tarifas, en dólares, son las siguientes:

Ta = 0,004d + 10 (considera que d es la distancia, en pies, recorrida por el taxi)

Tb = 0,005d (considera que d es la distancia, en pies, recorrida por el taxi)

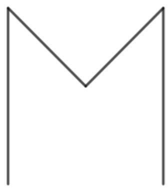
Tt = 77 (tarifa que no depende de la distancia)

a) ¿Cuánto costaría el taxi más barato? ¿De qué color es?

b) ¿Qué distancia, en pies, tiene que recorrer un taxi amarillo para que le cueste lo mismo que el turístico?

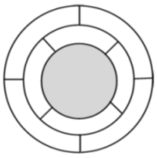
Durante el viaje de vuelta, como el vuelo es muy largo, los profes nos proponen una serie de enigmas.

Problema 8



Con tres rectas que corten la letra M, se tiene que conseguir el mayor número de triángulos posibles.

Problema 9



Si situamos los números del 1 al 8, sin repetir ninguno, dentro de cada uno de los sectores de la figura, de manera que la suma de dos sectores exteriores sea el número del sector interior, ¿cuál será el valor de la suma de los 4 sectores exteriores?

Problema 10

En el párrafo siguiente, rellena los vacíos con números, de tal manera que lo que quede escrito sea cierto.

En este párrafo aparece ___ veces el número 0, ___ veces el número 1, ___ veces el número 2, ___ veces el número 3, ___ veces el número 4, ___ veces el número 5, ___ veces el número 6, ___ veces el número 7, ___ veces el número 8 y ___ veces el número 9.

¡¡ENHORABUENA!! YA ESTÁS PREPARADO PARA IR DE VIAJE

XXII OLIMPIADA NACIONAL

Vigo, 2011

Sociedad dos Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)

Problema 1 Un trabajo informático

Por un trabajo informático he facturado una cierta cantidad de euros. Una vez descontado el 18,06 % me queda una cantidad de euros que contados de 5 en 5, de 7 en 7, de 9 en 9 y de 13 en 13 siempre da un resto de 2 euros.

¿Podrías con estos datos averiguar el importe de la factura, sabiendo que pagué menos de 6000 euros?

Problema 2 Un baño en Samil

Me estoy bañando en la playa de Samil. Toco el fondo con los pies y, cuando no hay olas, la parte de arriba de mi cabeza sobresale sobre el nivel del mar una altura igual a la mitad de la altura del mar que me cubrirá cuando pase la próxima ola, ola que hará que la altura del mar aumente la mitad. Si mido 1,75 m, ¿cuál es la altura de la ola?

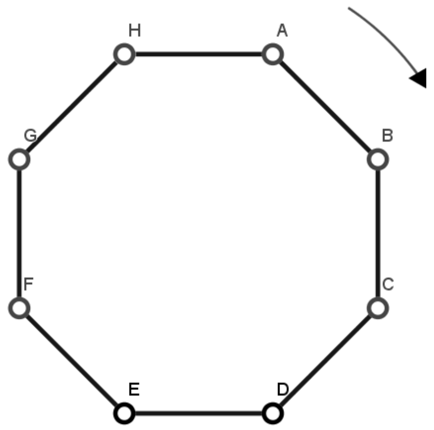
Problema 3 Una hormiga de paseo

Una hormiga camina por el borde de un plato de 8 lados iguales como el de la figura.

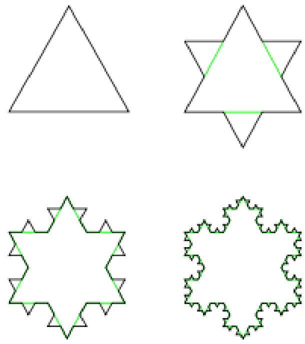
Cada lado del plato mide 14cm. La hormiga sale del vértice A y camina en el sentido que indica la flecha, siempre por el borde del plato. Hace la primera parada a 6 cm del vértice A y después, cada 6 cm hace una parada. En total hace 2000 paradas.

a) ¿Cuántas veces para en el vértice A?

b) ¿En qué otros vértices hace la misma cantidad de paradas que en A?



Problema 4 El copo de nieve



Partimos de un triángulo equilátero cuyo lado mide 9 cm. Dividimos cada lado en tres partes iguales y sobre el tercio del medio construimos otro triángulo equilátero con el que ampliamos la figura. Repetimos el mismo proceso en cada lado de la nueva figura. El diagrama muestra las cuatro primeras fases del proceso

a) Calcula el lado y el perímetro para las cuatro fases de la figura.

b) ¿Cuánto medirá el lado en la décima fase? ¿Y el perímetro?

c) Escribe el valor del lado y del perímetro para una fase cualquiera *n*.

Problema 5 Romeo Don Juan

Romeo tiene dos amigas que viven en zonas opuestas, Esther al este y Ruth al oeste. Como él es un hombre indeciso no sabe a cuál prefiere visitar y cuando llega a la parada del autobús coge el primero que pasa ya que los dos, el que va hacia el este y el que va hacia el oeste, pasan cada 10 minutos como indica el horario:

Próximo autobús	
Hacia el este	Hacia el oeste
18:00:00 18:10:00 18:20:00	18:01:00 18:11:00 18:21:00

Una tarde la chica "este", Esther, le dijo: ¡Qué contenta estoy! De cada diez días vienes a verme nueve.

En cambio, Ruth, la chica "oeste", le dijo: ¡Ya está bien! Solo te veo uno de cada diez días.

a) ¿Puedes explicar de forma razonada lo que ocurre?

Romeo le cuenta esto a su amigo Francisco que le dice:

Pues yo tengo dos amigas una que vive en el norte y otra que vive en el sur. Voy a visitar a la primera 5 días cada 12 y a la segunda 7 días cada 12.

b) ¿Puedes completar la tabla de los horarios de autobuses que coge Francisco?

Próximo autobús	
Hacia el norte	Hacia el sur
18:00:00	... ...

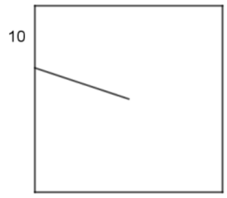
XXIII OLIMPIADA NACIONAL

Vitoria, 2012

Sociedad de Profesorado de Matemáticas de Euskadi
Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea “EMIE 20+11”

Problema 1 Partiendo la tarta

Ana quiere repartir una tarta cuadrada de 30 cm. de lado entre 5 personas de forma que reciban la misma cantidad de tarta. El primer corte lo hace partiendo del centro del cuadrado hasta el borde de la tarta, a 10 cm. de una esquina como muestra la figura.



Si el resto de cortes los hace también en línea recta y partiendo del centro, ¿Cómo cortó la tarta?

Con la condición de que la longitud de cada trozo correspondiente al borde de la tarta sea un número entero, indica entre cuántas personas podría hacerse el reparto.

Problema 2 El año 2012

a) Empezando por el número 26, construimos una lista de números de la siguiente forma: cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del número anterior. Es decir, el segundo número de la lista es el 40, el tercero es 16, el cuarto es 37 y así sucesivamente.

Si empezamos por el número 2012 ¿cuál será el número que ocupa el lugar 2.012?

b) Queremos calcular la cantidad de números que hay entre 1 y 2012 y que solo utilizan dos dígitos diferentes al escribirlos (por ejemplo 1.222) ¿cuántos habrá?

c) En la sucesión de números: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6,… ¿Cuál sería el término que ocupa el lugar 2012?

Problema 3 En el instituto

En el patio de un Instituto hay 70 chicos alineados en 7 filas y 10 columnas. Cada uno da la mano a todos los que están a su alrededor – por ejemplo, el que está situado en una esquina daría la mano a tres compañeros- ¿cuántos saludos hubo en total?

Y en el caso de que formasen *m* filas y *n* columnas, ¿cuántos saludos habría en total?

Problema 4 El juego de los múltiplos

Luis y Elena van a formar cada uno de ellos un número de tres cifras. Para ello eligen alternativamente un dígito entre los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. (Los dígitos no se pueden repetir). Luis gana si el número que forma es divisible por 3. En caso contrario gana Elena.

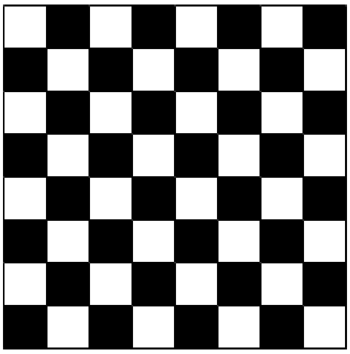
a) Si empieza eligiendo Luis, ¿cuál es la estrategia ganadora que puede seguir?
b) Si empieza eligiendo Elena, ¿sigue habiendo estrategia ganadora para Luis?
c) Y si eligiesen los números al azar, ¿qué probabilidad de ganar tendría Luis?

NOTA: La estrategia ganadora consiste en describir los pasos que debe dar Luis para que, haga lo que haga Elena, siempre gane.

Problema 5 Rellenando el tablero

Disponemos de un tablero de 64 casillas, cada una de 3 cm. de lado y de fichas de damas de 3 cm. de diámetro.

¿Cuál es el número máximo de fichas que pueden colocarse en el tablero, sin colocar una encima de otra ni traspasar sus bordes?



XXIV OLIMPIADA NACIONAL

Andorra, 2013

Instituto Español de Andorra

Problema 1 Las escaleras del Románico

Casi todo el mundo suele subir las escaleras de peldaño en peldaño, pero, en ocasiones, se suben dos a la vez. Dejamos para los más atrevidos subir tres a la vez, o más, pero aquí no lo consideraremos. Bajo estas condiciones, evidentemente una escalera de un peldaño se subiría de una sola manera y una escalera de dos peldaños tendría dos formas posibles de subirse. La de tres peldaños se subiría de tres formas posibles.

En el siglo V de nuestra era, una conocida matemática y astrónoma fue brutalmente asesinada en Alejandría.

1. ¿De cuántas maneras diferentes se puede subir una escalera de tantos peldaños como letras tiene el nombre de su padre? **[1]**

2. ¿De cuántas maneras diferentes se puede subir una escalera de cinco peldaños? ¿y de seis?

3. Curiosa la relación entre los resultados obtenidos anteriormente, la disposición de las hojas en un tallo y los conejos. Explica brevemente esta relación. Un célebre *matemático de Pisa del siglo XIII*, tocayo del pintor de la Gioconda, te podrá ayudar. **[2]**

La iglesia de Sant Serni de Canillo es una de las iglesias románicas del Principado. Se accede a ella por una *pequeña escalinata*, que tiene tantos peldaños como el doble del dígito *de la primera cifra del año de nacimiento del conocido matemático fundador de la Hermandad Pitagórica.* **[3]**

4. ¿Cuántos escalones tiene esta escalinata de la Iglesia de Sant Serni?

5. ¿De cuántas maneras diferentes se podría subir esta escalera de la iglesia?

6. Considerando que cada forma de subir la escalera tuviese la misma probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que un turista suba toda esta escalera de dos en dos peldaños?

7. Considerando, igual que en la pregunta anterior, que cada forma de subir la escalera tuviese la misma probabilidad.

¿Qué porcentaje de individuos cabe esperar que la suban de uno en uno, salvo dos de los peldaños que los suban a la vez?

Las referencias [1], [2], [3],… de la prueba están al final de la misma.

Problema 2 El puente de Encamp

Cuatro amigos han quedado en Encamp, al otro lado del puente, dentro de unos minutos. Es de noche y el puente es estrecho, sólo disponen de una linterna (imprescindible tanto a la ida como a la vuelta) y deben cruzar, como máximo, de dos en dos. La habilidad y el vértigo de cada amigo al cruzar el puente hace que sus tiempos sean diferentes. Con unas pistas sobre la *historia de Andorra* los podrás adivinar.

Ana tarda tantos minutos como el doble de la diferencia entre el último y penúltimo dígito *del año en el que el ruso Boris Skossyreff se propuso como rey de Andorra.* **[4]** Bea tarda tantos minutos como la suma de los dos primeros dígitos del *año de la firma del primer pariatge.* **[5]**

Carmen tarda tantos minutos como el quíntuple de la diferencia entre el segundo y el tercer dígito del *año en el que se segregó la parroquia de Escaldes-Engordany de la de Andorra la Vella.* **[6]**

David tarda tantos minutos como el triple del último dígito del *año en el que se construyó la primera carretera que comunicaba Andorra con el extranjero*, en concreto con España. **[7]**

1. ¿Cuánto tiempo tarda cada uno?

Son las 23:15h. La cita es dentro de tantos minutos como indica *el quinto primo de Sophie Germain.* **[8]**

2. ¿A qué hora es la cita?

3. ¿Cómo se deben organizar para cruzar el puente en esos minutos y llegar a tiempo a la cita?

Problema 3 Las áureas aguas termales

El agua es una de las riquezas de Andorra, no solo por los ríos y lagos que nacen en su territorio, sino también por las fuentes termales, ricas en azufre y muy recomendables para los tratamientos terapéuticos y de belleza.

Un joven emprendedor tiene el proyecto de construir una piscina termal de planta rectangular cuya profundidad mínima, en metros, es la parte entera del *número de oro* **[9],** y la máxima, la diferencia entre el tercer dígito y el primero de la parte decimal de dicho número. Entre ambas profundidades hay una rampa de pendiente constante en todo el largo de la piscina.

Es tal la armonía y belleza de la proporción de la que surge el número de oro, que *Rafael Alberti,* reconocido escritor de la generación del 27, le dedica un *soneto titulado "A la divina proporción".* El largo de la piscina tiene tantos metros como caras tiene la figura azul de la que habla el soneto. **[10]**

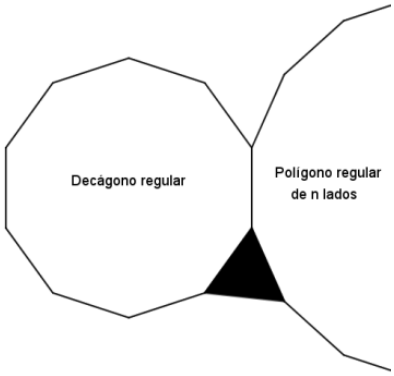
Cuando Alberti habla en su soneto de las "cinco formas regulares" se refiere a los cinco *Sólidos Platónicos*. El ancho de la piscina tiene tantos metros como caras tiene el Sólido Platónico de seis vértices. **[11]**

1. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina?

2. ¿Cuál es la capacidad (en metros cúbicos) de la piscina?

3. Llena al 85 %, ¿cuántos hectolitros de agua contiene?

Se utilizará una plataforma flotante como la que se esboza en el gráfico (no está a tamaño real), formada por dos polígonos regulares adosados por uno de sus lados.



4. Uno de los polígonos es de 10 lados, ¿de cuántos lados es el otro?

Descúbrelo teniendo en cuenta que el triángulo negro (que no forma parte de la plataforma) es equilátero.

5. ¿Qué nombre recibe ese polígono?

6. Se estima que el tiempo de limpieza de la plataforma será de 20 minutos si lo hacen entre tres operarios. Suponiendo proporcionalidad, ¿cuánto tiempo tardarían dos operarios en limpiar el 80 % de su superficie?

Problema 4 Los siete sultanes

El principado de Andorra ha sido, en múltiples ocasiones, sede de alguna de las etapas de la vuelta ciclista a España, generalmente en etapas de montaña. Ahora dejamos a un lado la montaña porque lo que nos ocupa es una prueba contrarreloj. ¡Atención!, porque para conseguir la victoria en cada etapa tendrás un tiempo limitado.

Las pruebas de este problema las verás en la pantalla a las 11:00h. Cuando la presentación haya terminado, los profesores, pasados 5 minutos, recogerán las hojas con las respuestas a este problema.

CUESTIÓN 1: ¿Verdadero o falso? [En pantalla durante 2 min] En cada unidad de tiempo el número de aficionados concentrados en el puente de la Margineda aumenta en la mitad, luego en dos unidades de tiempo se habrá duplicado.
CUESTIÓN 2: Hasta el infinito y más allá [En pantalla durante 3 min] En la meta del *Coll de la Gallina* había, al principio, 451 aficionados y, media hora más tarde, su número ascendía a 999. ¿Qué dígito se encuentra en la posición número mil de las cifras decimales del cociente entre ambas cantidades (451/999)?
CUESTIÓN 3: Otra vez, ¿verdadero o falso? [En pantalla durante 2 min] La cantidad de vehículos que entran al país el día de la vuelta aumenta un 100 % en cada unidad de tiempo, luego en dos unidades de tiempo habrá aumentado un 400 %.
CUESTIÓN 4: Luna rota [En pantalla durante 3 min] La noche de su triunfo, Contador mira al cielo y piensa: con dos líneas rectas, ¿cuál sería el número máximo de trozos en los que se podría “romper” esta luna? 
CUESTIÓN 5: Hasta la meta [En pantalla durante 3 min] En un circuito de entrenamiento de 2000 m, Contador (C) ha acabado 200 m antes que Valverde (V) y 290 m antes que Moreno (M). Si los tres ciclistas han mantenido constantes sus velocidades durante todo el recorrido, ¿a qué distancia del final se encontrará Moreno cuando Valverde finalice el circuito?

[1] A partir de la pista de Alejandría, el nombre de la matemática es Hipatia y el padre se llama Teón

[2] Fibonacci

[3] 580 antes de Cristo

[4] 1934

[5] 1278

[6] 1978

[7] 1914

[8] 23

[9] 1,6180339887…

[10] Dodecaedro azul

[11] Octaedro, 8 caras

XXV OLIMPIADA NACIONAL

Barcelona, 2014

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Problema 1

Para conmemorar esta XXV Olimpiada dedicaremos el primer problema al número 25.

a. La suma de los nueve primeros números es 45,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

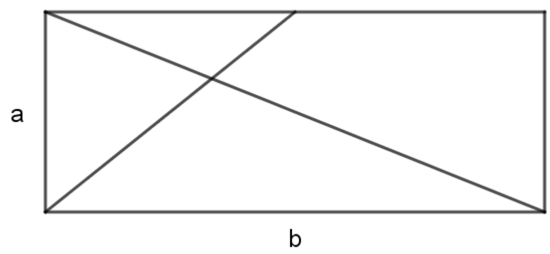
Modifica el menor número de operaciones posibles para que el resultado sea 25. (En lugar una suma puedes poner una resta, una multiplicación o una división)

b. Utilizando las cifras del número 2014, una vez cada una, y las operaciones que quieras debes lograr que el resultado sea 25. Encuentra cuatro soluciones distintas.

c. Algunos números pueden expresarse como suma de dos o más números consecutivos. Por ejemplo, 4 + 5 = 9 y también 2 + 3+ 4 = 9. Expresa el número 25 como suma de dos o más consecutivos de todas las maneras posibles y justifica que no hay más soluciones.

Problema 2

En un rectángulo de lados *a* y *b* trazamos una diagonal y un segmento que une un vértice que no está en la diagonal con el punto medio de un lado opuesto (ver figura). El rectángulo inicial queda dividido en cuatro figuras. ¿Cuál es el área de cada una de las cuatro figuras? (Puedes expresar cada área como una fracción del área del rectángulo inicial).



Problema 3

Vamos a analizar un juego para dos jugadores. Se escriben dos números menores que 100 en un papel. Por ejemplo, 35 y 24. El primer jugador resta los dos números y anota el resultado en el papel. Ahora el segundo jugador elige dos de los tres números escritos, los resta y anota el resultado en el mismo papel. El juego sigue de modo que en cada jugada se restan dos números que ya se han escrito previamente y se anota un nuevo número. Siempre se resta de modo que el resultado sea un número positivo. Y no es posible restar dos números si el resultado es un número que ya está escrito. El jugador que no puede anotar ningún número pierde la partida.

a. ¿Qué jugador, el primero o el segundo en jugar, tiene ventaja? ¿Cómo hay que jugar para ganar?
b. Si cambiamos los números iniciales, ¿cómo podremos saber qué jugador tiene ventaja? Razona tu respuesta.

Problema 4

En un papel cuadriculado dibujamos un rectángulo siguiendo los lados de la cuadrícula y trazamos una diagonal.

a. ¿Cuántos cuadrados de la cuadrícula cortarán la diagonal de un rectángulo de 7 unidades de largo y 4 unidades de ancho? ¿Y la diagonal de otro rectángulo de 9 unidades de largo y 3 unidades de ancho? (Se entiende que la unidad de longitud es el lado de un cuadradito de la cuadrícula y, por tanto, todos los rectángulos tienen medidas enteras).
b. Encuentra una expresión -una fórmula- que te permita calcular el número de cuadrados que cortará la diagonal a partir de las longitudes de los lados del rectángulo. Razona tu respuesta.
c. Si en lugar de trazar una diagonal trazamos las dos, ¿cuáles deben ser las medidas de los lados del rectángulo para que el número de cuadrados que cortan las dos diagonales sea el doble que los cortados por una sola diagonal? Razona tu respuesta.

Problema 5

Un joven y un viejo viven en el mismo edificio y trabajan en el mismo sitio. Cada mañana salen para trabajar a la misma hora, pero el joven tarda 20 minutos en hacer el trayecto de casa al trabajo y el viejo tarda 30 minutos.

a. Si hoy el viejo ha salido 5 minutos antes, ¿en qué punto del trayecto se encontrarán?
b. ¿Cuántos minutos más tarde tiene que salir el joven si quiere encontrarse con el viejo justo cuando se ha recorrido los 4/5 del trayecto? Razona tu respuesta.

XXVI OLIMPIADA NACIONAL

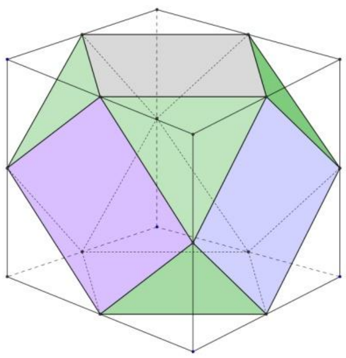
Huesca, 2015

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas

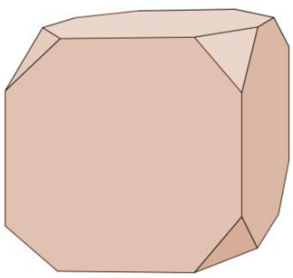
Problema 1

Se cortan las esquinas de un cubo de 10 cm de arista por los puntos medios de éstas, obteniéndose un "cuboctaedro" formado por 6 caras cuadradas y 8 triángulos equiláteros (ver figura).

1. Calcula el volumen de este cuboctaedro.



En otro cubo del mismo tamaño se marcan los puntos de las aristas que distan 2 cm del vértice más cercano y, después, se cortan las esquinas por esos puntos, obteniéndose en este caso un cubo "truncado" formado por 6 caras octogonales (irregulares) y 8 triángulos equiláteros (ver figura).

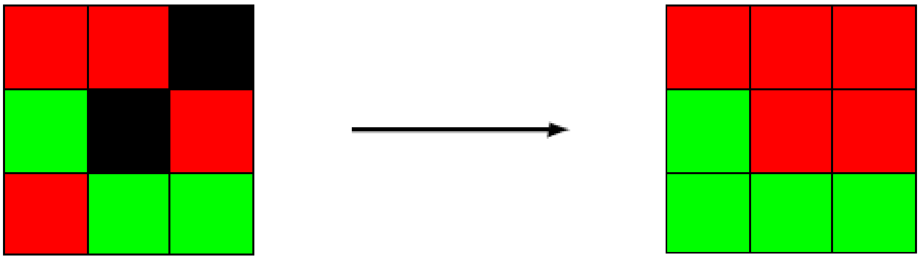


2. Calcula el área total de este cubo truncado.
3. ¿A qué distancia de los vértices se tendría que haber cortado las esquinas para que los octógonos del cubo truncado fuesen regulares (iguales todas sus aristas)?.

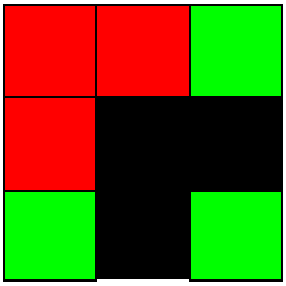
Problema 2

Considera un cuadrado (como en el ejemplo de abajo) partido en nueve subcuadrados. Cada uno de estos subcuadrados está pintado de **rojo**, **verde** o **negro**. Una *repintada* de este cuadrado consiste en coger una fila, columna, o diagonal, y en alterar los colores allí de modo que cambiamos **rojo** por **verde**, **verde** por **negro** y **negro** por **rojo**.

Ejemplo:

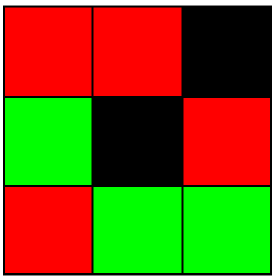


1. Transforma, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado



en el cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo.

2. Se puede transformar, mediante una sucesión de repintadas, el cuadrado



en el cuadrado con todos sus subcuadrados pintados de rojo?[1]

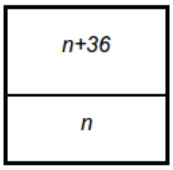
[1] Ayuda: considera el número de subcuadrados verdes menos el número de subcuadrados rojos.

Problema 3

El castillo de Loarre, cuya imagen puedes ver en la figura, fue construido para organizar ataques contra las localidades situadas a sus pies. Es del siglo XI y por su buena conservación es uno de los mejores ejemplos de arquitectura militar y civil del románico en España.

Este sábado lo visitaremos y lo haremos vestidos de guerreros medievales. Necesitaremos de un rey o una reina que nos dirijan pues es muy posible que mientras estemos en él se pueda producir un “combate medieval”. ¿Serías un buen rey o reina organizando a tus guerreros?

Supón que puedes disponer a todos tus arqueros en **forma de cuadrado**, con todos ellos uniformemente distribuidos en filas y columnas. El número de arqueros es tal que el cuadrado se puede dividir en dos rectángulos de manera que uno de los rectángulos tiene 36 arqueros más que el otro (ver figura).



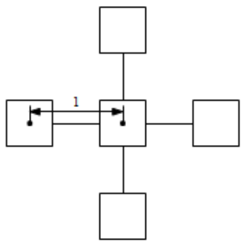
1. ¿De cuántos arqueros dispone en total?
   Supón ahora que organizas a todos tus arqueros en una fila
2. Si dispones de 25 caballeros entonces
   $$25! = 15511121004333\square980984000000$$
   son todas las formas de disponer a todos tus caballeros en fila. [2]
   ¡Vaya! Se ha borrado una de las cifras. ¿Sabría calcular el número que falta en el cuadrado?
3. Por cierto, si dos de tus 25 caballeros quisieran ir juntos en la fila, ¿de cuántas formas podría ordenarse la fila? [3]
4. Si observas las formas de ordenar los caballeros se tiene que $4! = 24$ no acaba en cero pero $5! = 120$ tiene un cero al final y $25!$ Tiene 6 ceros al final. ¿Cuántos ceros finales tendrá el número de formas de ordenar en fila 100 caballeros?

[2] El modo de contar el número de formas de ordenar en una fila n elementos es calculando el *factorial* del número n que se define como *el número formado por el producto de todos los números naturales menores o iguales a* n y se denota $n!$. Por ejemplo, si tenemos 2 caballeros llamados A y B los podemos ordenar en fila como: AB o BA, luego tenemos $2 = 2\cdot 1 = 2!$ formas. Si tenemos a 3 caballeros llamados A, B y C los podemos ordenar en fila como: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB o CBA, luego tenemos $6 = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!$ formas. Para el caso de 4 caballeros sería $24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!$ formas, para 5 caballeros sería $120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5!$ formas y así sucesivamente.

[3] Ya que el número es muy grande lo puedes dar utilizando la notación de número factorial.

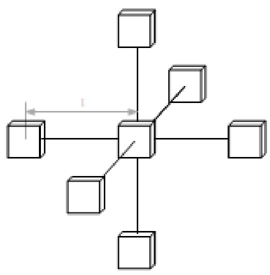
Problema 4

En el lejano planeta Z2 existe una raza inteligente que se caracteriza por construir sus ciudades de una manera especial. Comienzan levantando un edificio central, y el resto los añaden por etapas. En la primera etapa construyen un edificio al norte del inicial, otro al sur, otro al este y otro al oeste, todos ellos a distancia 1 (ver figura). En cada etapa se procede de la misma manera con todos los edificios existentes: se construyen a su alrededor los cuatro edificios correspondientes, salvo aquellos que ya estén construidos de alguna etapa anterior.



1. ¿cuántos edificios se construyen en la ciudad en la quinta etapa? ¿Y en la n-ésima?
2. ¿Cuál es la distancia mínima al edificio central de los edificios que se construyen en la quita etapa? ¿Y en la *n-ésima*?

Unos pocos siglos más tarde, volvemos para ver qué fue de estos simpáticos alienígenas. Su desarrollo científico y tecnológico ha sido considerable en este tiempo, ya que nos los encontramos afanados en la construcción de una compleja estación espacial en órbita alrededor de su planeta. Sin embargo, algunas costumbres nunca se pierden: el método de construcción de la estación es prácticamente el mismo que seguían para sus ciudades. Parten de un módulo central, donde se ubicará la sala de mando, y en sucesivas etapas acoplan a cada módulo existente hasta seis módulos más: encima, debajo, a la izquierda, a la derecha, delante y detrás, formando ángulos rectos y todos a la misma distancia, que volvemos a tomar igual a la unidad (ver figura). Por supuesto, si alguno de estos módulos ya ha sido añadido en una etapa anterior no lo vuelven a poner. Así pues, nos toca resolver otra vez el problema anterior, pero en esta ocasión en tres dimensiones:



1. ¿Cuántos edificios se añaden en la ciudad en la quinta etapa? ¿Y en la *n-ésima*?
2. ¿Cuál es la distancia mínima al edificio central de los edificios que se añaden en la quita etapa? ¿Y en la *n-ésima*?

XXVII OLIMPIADA NACIONAL

Santander, 2016

SOCIEDAD MATEMÁTICA DE PROFESORES DE CANTABRIA

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria

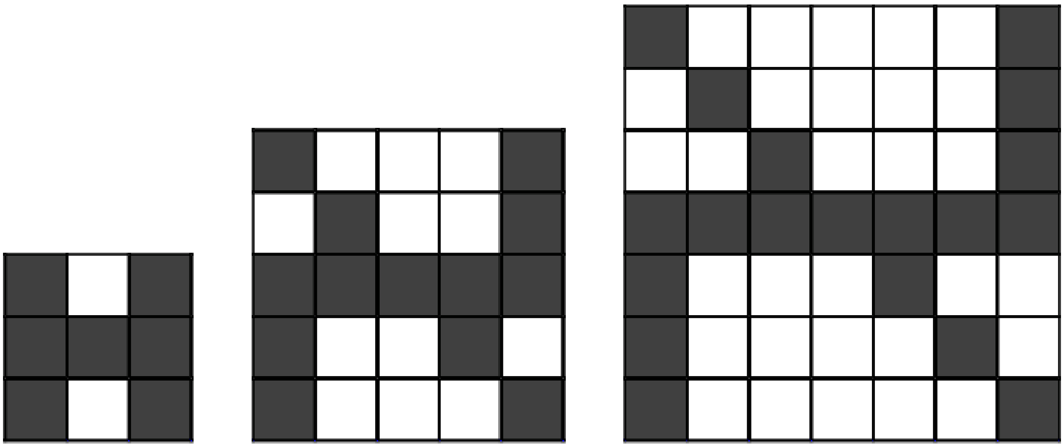
Problema 1 Julióbriga

Julióbriga (en latín *Iuliobriga*, literalmente *ciudad fortificada de Julio*, en memoria del padre adoptivo de Augusto, Cayo Julio César) fue la ciudad romana más importante de las nueve fundadas en Cantabria. Entre los restos destacan:

- El foro romano de la ciudad, de pequeñas dimensiones, edificado en lo alto de la loma, cerca y bajo la iglesia románica de Retortillo.
- Casa de los Morillos, del año 80 d. C.
- Casa de los Mosaicos, con llamativos pavimentos blancos y negros, termas y un hipocaustum.
- Tabernae, edificio tipo ínsula con aterrazamiento del terreno para poder albergar almacenes y comercios.

La imagen muestra las ruinas de la ciudad romana de Julióbriga (Retortillo, Campoo de Enmedio).

Alberto, tras una visita a Julióbriga, se entretiene diseñando sus propios mosaicos. Por el momento, está siguiendo un mismo patrón para construir mosaicos cuadrados, cada vez más grandes, con baldosas blancas y negras.



Mosaico 1 Mosaico 2 Mosaico 3

Alberto te formula las siguientes preguntas, que desea respondas con acierto.

a) ¿Cuántas baldosas negras se emplearán para construir el mosaico número 4?

b) ¿Cuántas baldosas negras se emplearán para construir el mosaico número 7?

c) ¿Cuál será el total de baldosas empleadas en el mosaico que tenga exactamente 121 baldosas negras?

d) ¿Podrá construirse un mosaico con un número de baldosas negras que sea múltiplo de 3?

<u>Problema 2</u> El Sardinero y sus alrededores

Si hay una zona que caracterice la ciudad de Santander, y que es turística por excelencia, es la conocida como El Sardinero. En ella se encuentran las playas de El Sardinero, La Concha, Mataleñas, El Camello y La Magdalena. En la península de La Magdalena se ubica el palacio del mismo nombre, Palacio de La Magdalena, que es un símbolo de la costa santanderina. En verano la actividad en dicha península es intensa; el palacio es sede de los cursos de verano de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo y en su campa se celebran desde conciertos a concursos de hípica. Un paseo por El Sardinero permitirá contemplar los Jardines de Piquío y una buena parte de la arquitectura más noble de la ciudad. La imagen muestra una vista de la Primera Playa de El Sardinero, con el Gran Casino Sardinero al fondo.

Algunos estudiantes del Grado de Matemáticas han estado realizando un trabajo estadístico sobre la actividad de las personas que están en la Primera Playa del El Sardinero entre las 10:00 h, y las 11:00 h. Acerca del jueves pasado tienen los siguientes datos:

- A las 10:00, en la arena de la playa, hay dos grupos de personas: uno es de niños y otro es de adultos.
- A los 10 minutos llegan a la arena siete adultos más y seis de los niños que había en la arena van a bañarse.
- Después de 20 minutos más, llega a la arena otro grupo distinto de niños, cuyo número es el doble de los que había. Al mismo tiempo, cinco adultos que estaban en la arena van a bañarse.
- Tras otros 15 minutos, seis adultos y la mitad de los niños que permanecían en la arena van a bañarse.
- A las 11:00 h se incrementa en ocho el número de adultos que están tomando el sol en la arena y se mantiene el número de niños. En ese momento, en la arena, hay el doble de adultos que de niños.

Sabiendo que a las 11:00 h había 36 personas en la arena,

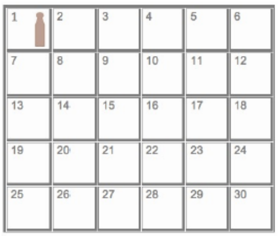
a) ¿cuántos adultos y cuántos niños había en la arena a las 10:50 h?

b) ¿cuántos adultos y cuántos niños había en la arena a las 10:00 h?

<u>Problema 3</u> Bolos

En Cantabria el juego de los bolos es uno de los más arraigados. Durante el desarrollo del juego, cada jugador debe derribar el mayor número de bolos, de un total de nueve - sin contar el emboque-, mediante el lanzamiento de una bola. Los bolos suelen estar confeccionados en madera de avellano o de abedul y disponen de una base de metal llamada argolla; tienen 45 cm de alto y 5 cm de diámetro. La bolera, lugar donde tienen lugar los lanzamientos, es de forma rectangular y consta de tres partes: tiro, caja y birle; y, aunque no tiene unas medidas fijas, se establecen como idóneas 34 × 8 m.

Proponerte en esta prueba olímpica jugar a los bolos resultaría complicado; por ello, se ha ideado otro juego. Lee atentamente las condiciones del que te planteamos, en el que como homenaje a ese tradicional juego, se ha incluido un bolo en su presentación.



En este juego participan dos personas, Ana y Blas. Gana el juego quien logre colocar el bolo en la casilla 30, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Comienza Ana moviendo el bolo. A continuación, lo mueve Blas desde la posición en que lo dejó Ana; después, mueve de nuevo Ana desde la posición en que lo dejó Blas; y así sucesivamente.
- Cada jugador en su turno, puede mover el bolo una o más posiciones (una o más casillas) siempre que sea en horizontal hacia la derecha, en vertical hacia abajo, o en diagonal hacia la derecha y hacia abajo.

Se pide:

a) Si un jugador deja el bolo en la posición "10", indica los números de las casillas, ordenados de menor a mayor, a las cuales puede mover el bolo el otro jugador en el siguiente movimiento.

b) Se llaman "casillas perdedoras" a las casillas en las que si un jugador coloca el bolo, siempre perderá si el otro jugador juega adecuadamente.
Indica, ordenada de menor a mayor, la numeración de diez "casillas perdedoras".

c) Se llaman "casillas ganadoras" a aquellas en las que cuando un jugador coloca el bolo, siempre ganará, si juega adecuadamente, con independencia de lo que haga el otro jugador.
Indica, ordenada de menor a mayor, la numeración de dos "casillas ganadoras"

d) Este juego no es equitativo ya que si el primer jugador, en este caso Ana, juega adecuadamente, siempre gana.
Señala la numeración de dos casillas a las que Ana puede mover el bolo en el primer movimiento para ganar con seguridad.

Problema 4 Postres típicos

La *quesada pasiega* es un postre típico de los Valles Pasiegos, una comarca de Cantabria, y uno de los platos más representativos de la gastronomía de la región. Se compone de leche de vaca cuajada que se acompaña de mantequilla y harina de trigo, huevos y azúcar. La mezcla se suele aromatizar con limón rallado y canela en polvo. Por otra parte, está el *sobao pasiego*, que es otro producto de repostería tradicional. Su popularidad ha hecho que, hoy en día, se comercialice en toda España, aunque la versión de Cantabria es diferente a la general. Se ignora el origen histórico de este bizcocho, aunque con toda probabilidad fue producto del uso espontáneo de las materias primas comunes en el entorno rural cántabro: mantequilla y harina.

En una confitería de Cantabria se venden bandejas con diferentes dulces típicos, elegidos entre los siguientes, a los que más tarde nos referiremos sólo mediante la letra que les acompaña:

Quesadas (Q), Sobaos (S), Arroz con leche (L), Corbatas de Unquera (C),
Polkas de Torrelavega (P), Pantortillas de Reinosa (R), Almendrados (A) y
Tarta de hojaldre y mantequilla (T)

Las bandejas de dulces se confeccionan según las siguientes condiciones:

- Si A está incluido en una bandeja, entonces Q también debe estar incluido en la misma bandeja.
- Si P está incluido en una bandeja, entonces S también debe estar incluido en la misma bandeja.
- Si C no está incluido en una bandeja, entonces R sí debe estar incluido en esa bandeja.

- Si C está incluido en una bandeja, entonces S debe estar incluido en la misma bandeja.
- L y P no pueden ser incluidos ambos en la misma bandeja.
- P está incluido en una bandeja si y sólo si A también está incluido en esa bandeja.

Ayuda a los confiteros en la preparación de las bandejas, respondiendo a las siguientes preguntas:

a) ¿Es cierto que una bandeja no puede tener hasta siete dulces diferentes? ¿Es cierto que una bandeja puede tener un solo dulce? Razona tus respuestas.

b) Si P está incluido en una bandeja, justifica cuál de las siguiente parejas de dulces deben estar incluidos en la misma bandeja:

b_1) Q y C b_2) A y S b_3) T y R

c) Si S no está incluido en una bandeja, ¿cuál de las siguientes listas representa la lista completa de los dulces que obligatoriamente deben estar incluidos?

c_1) R, Q y A c_2) R y Q c_3) R c_4) Q, T, R y L

d) Si los confiteros desean comercializar una bandeja con exactamente cinco dulces, ¿cuál de las siguientes combinaciones es aceptable?

d_1) P, A, S, Q y T d_2) R, L, S, T y Q d_3) C, R, L, S y Q

Problema 5 Mitología cántabra

El *Ojáncano*, la *Guajona*, la *Anjana* o el *Lantarón* son nombres que se habrá encontrado toda persona que haya estado interesada por conocer los aspectos elementales de la mitología cántabra, poblada tanto de seres malévolos como de otros bondadosos y hermosos, de unos juguetones y bromistas junto a otros cuyo deseo sólo es ayudar. Se pueden encontrar brujas y animales imposibles de tierra y de mar, ninfas y sirenas, duendes y semidioses.En el libro *Monstruos, Duendes y Seres Fantásticos de la Mitología Cántabra* hay información detallada sobre todos estos seres.


Trastolillo


Musgoso


Ojáncano


Anjana

En honor a esos personajes mitológicos cántabros, vamos a dar nombres de algunos de ellos a unos tipos de números que se han colado en el siguiente problema.

Vamos a llamar número *trastolillo* a cada número natural que verifique una y solo una de las dos condiciones siguientes y vamos a llamar número *musgoso* a cada número natural que verifique ambas condiciones simultáneamente. Las condiciones son:

- Ser múltiplo de 7.
- Al dividirlo entre 5 se obtiene de resto 2.

a) Escribe los tres primeros números *trastolillos* y los tres primeros números musgosos.

b) Acerca de la cantidad de número *musgosos* que están comprendidos entre 1 y 2016, se sabe que:

- es un número par de dos cifras.
- tiene exactamente cuatro divisores.
- la diferencia entre los dos divisores medianos es el cubo de un número.

¿Cuál es la cantidad de números *musgosos* comprendidos entre 1 y 2016?

c) Determina la cantidad de números *trastolillos* que están comprendidos entre 1 y 2016.

XXVIII OLIMPIADA NACIONAL

Valladolid, 2017

Asociación Castellana y Leonesa de Profesores de Matemáticas «Miguel de Guzmán»

Problema 1 Organizando el VIII CIBEM

El CIBEM es un encuentro de profesores iberoamericanos de Matemáticas que todavía mantienen viva la llama de la ilusión por esta maravillosa tarea que es la educación matemática.

El I CIBEM se celebró en 1990 en Sevilla. Este año, 2017, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) organiza el VIII CIBEM, que se celebrará en Madrid del 10 al 14 de julio y al que acudirán 2000 profesores.

El primer día, para animar el tiempo de descanso entre sesiones, la organización propone a los asistentes el siguiente problema:

Varias personas en las redes sociales están hablando de un número; sabemos que dos de ellas mienten y todas las demás dicen la verdad:

La 1ª persona dice: “tiene 6 divisores impares”
La 2ª persona dice: “es múltiplo de 2”
La 3ª persona dice: “es múltiplo de 3”
La 4ª persona dice: “es múltiplo de 4”
La 5ª persona dice: “es múltiplo de 5”
La 6ª persona dice: “es múltiplo de 6”
La 7ª persona dice: “es múltiplo de 7”
La 8ª persona dice: “es múltiplo de 8”
La 9ª persona dice: “es múltiplo de 9”
La 10ª persona dice: “es múltiplo de 10”
La 11ª persona dice: “es inferior a 700”
La 12ª persona dice: “es inferior a 600”
La 13ª persona dice: “es inferior a 500”
La 14ª persona dice: “es superior a 350”
La 15ª persona dice: “es superior a 400”

¿Qué personas mienten? ¿De qué numero se trata? ¿Existe una única solución?

Problema 2 Jugando con dados

La probabilidad tiene su origen en los estudios de las posibilidades de ganar en juegos de azar. En el año 1650, el caballero De Meré, un francés aficionado al juego, se encontró con Blaise Pascal y le propuso un problema que ya se había discutido durante la Edad Media.

El juego consistía en que cada jugador elegía un número, tiraban un dado alternativamente y el que conseguía primero tres veces el número elegido, ganaba.

El problema que le propone De Meré a Pascal consiste en establecer cómo debían repartirse el premio si, al suspenderse el juego repentinamente antes de su finalización, uno de ellos había conseguido su número dos veces y su contrincante una vez.

Pascal le envía cartas a otro matemático famoso de la época; Pierre de Fermat, contándole este problema. En esta correspondencia empezaron a construirse los principios básicos de la probabilidad, que serían después recopilados y publicados por Huygens (1629-1695).

El profesor de Historia tiene una curiosa forma de utilizar las Matemáticas para elegir a cuales de sus 32 alumnos les va a preguntar. Cuando llega a clase lanza dos dados cúbicos y suma las puntuaciones conseguidas en cada uno de ellos. Del resultado de esta suma calcula los divisores y los múltiplos menores o iguales que 32. Los alumnos cuyo número en la lista de clase coincida con alguno de los números que ha obtenido, son a los que pregunta las lecciones y actividades del día.

a) ¿Quiénes son los alumnos que tienen posibilidades de que les pregunten todos los días?

b) ¿Existe algún alumno al que no preguntará nunca? ¿Quién o quiénes serán?

c) ¿Qué pares de números tienen que salir en los dados para que pregunte al menor número de alumnos?

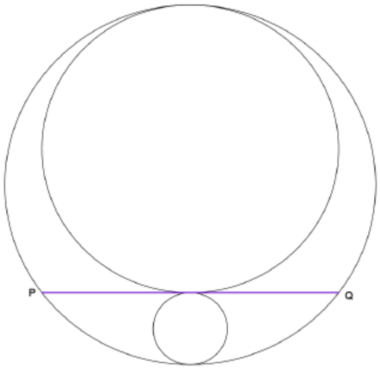
d) ¿Qué pares de números tienen que salir en los dados para que pregunte al mayor número de alumnos?

e) ¿Quién tendría menos posibilidades de que le preguntase: el alumno numero 14 o el numero 22?

Razona todas las respuestas.

Problema 3 Sangaku

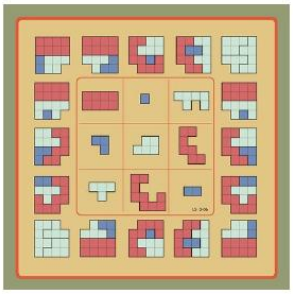
En las entradas de varios templos japoneses hay tablillas de madera ("sangaku", en japonés) con dibujos de problemas geométricos colgados allí "en honor de los dioses y para honra de sus autores". Algunos de ellos muestran configuraciones geométricas muy complicadas y su resolución puede ser muy difícil. El problema que presentamos aquí no procede de tan lejos, pero su configuración resulta en cierto modo similar a algunos de los originales.



Tres circunferencias son tangentes entre sí, como en la figura adjunta. La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene un área igual a 2π m^2.

Calcula la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

Problema 4 Cuadrados mágicos geométricos



*Un cuadrado es **geomágico** si al unir todas las piezas de una fila, columna o diagonal obtenemos siempre una figura del mismo tamaño y forma.*

Los cuadrados geomágicos fueron inventados en 2001 por el ingeniero electrónico británico Lee Sallows, aficionado a las Matemáticas recreativas.

La imagen corresponde a uno de estos cuadrados resuelto, extraído de su página web.

Entrar en ella supone un entretenimiento asegurado.

Ahora se trata de completar el cuadrado numérico que os proponemos.

En esta tabla de números, queremos que las filas (líneas horizontales) y las columnas (líneas verticales) formen progresiones aritméticas; es decir, que la diferencia entre dos números consecutivos (situados en una misma fila o en una misma columna) sea siempre el mismo valor en toda esa línea.

Inicialmente nos dan los cuatro valores que figuran en ella. ¿Es posible completar la tabla, con números naturales, para que todas sus líneas (horizontales y verticales) formen progresiones aritméticas?

Razona adecuadamente la respuesta.

	74			
				186
		103		
0				

Problema 5 La divina proporción

La Teoría de las Proporciones fue desarrollada por el astrónomo y matemático del siglo IV a.C. Eudoxo de Cnido y recogida por el gran matemático de la antigüedad, Euclides de Alejandría (325 a.C. - 265 a.C.) en el Libro V de sus famosos Elementos.

Desde su origen, el estudio de las proporciones ha permanecido vigente hasta la actualidad constituyendo un cuerpo doctrinal importante en el marco general de los currículos de distintos niveles educativos, tanto de Enseñanza Primaria como de Secundaria, Bachillerato y Universidad.

Vamos a considerar el siguiente conjunto de números:

$$\boldsymbol{A_n = \{n, n+1, n+2, \cdots \cdots \cdots, n^2 - 4n\}} \text{ siendo } \boldsymbol{n} \text{ un número natural}$$

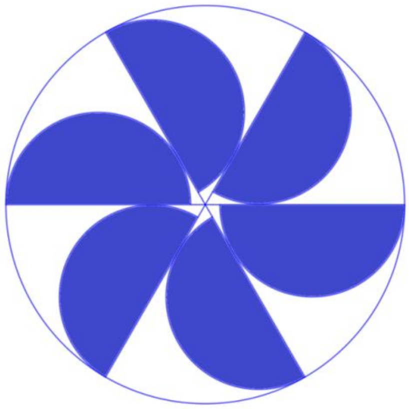
a) Para $\boldsymbol{n = 6}$, escribe los números que forman el conjunto A_6. Encuentra, dentro de este conjunto, cuatro números que formen una proporción.
b) Haz lo mismo para $\boldsymbol{n = 7}$, $\boldsymbol{n = 8}$ y $\boldsymbol{n = 9}$.
c) Demuestra que si $\boldsymbol{n \geq 10}$, siempre se pueden elegir 4 números distintos del conjunto A_n de manera que con ellos se puede formar una proporción.

XXIX OLIMPIADA NACIONAL

Valencia, 2018

Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana
«Al -Khwarizmi»

Problema 1 Un patrón con semicírculos



Un día, Juan y Miguel se pusieron a hacer en el suelo un patrón como el de la figura siguiente:

En la figura hay 6 semicírculos iguales y tangentes unos con otros, inscritos dentro de una circunferencia grande.

Si lo hicieron de forma que el radio de los semicírculos pequeños sea de 1 metro, ¿cuál será el radio de la circunferencia grande?

Problema 2 Sumas que repiten cifras

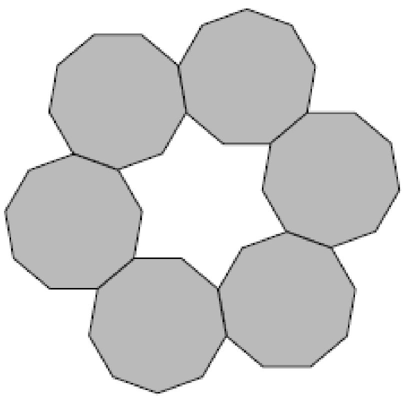
Observa las siguientes operaciones:

$$\underbrace{1111\cdot 1111}_{A}-\underbrace{111\cdot 11111}_{B}+\underbrace{1111}_{C}-\underbrace{111}_{D}+\underbrace{11}_{E}=2011,$$
$$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7-7\cdot 7\cdot 7-7\cdot 7+7=2016.$$

Si nos fijamos, solo estamos sumando, restando y multiplicando números que tienen todas sus cifras iguales, y además todos los sumandos (A, B, C,D y E en el primer ejemplo) son números distintos.

Escribe, si es posible, expresiones similares a estas que sumen 2017, 2018 y 2019 haciendo que todas las cifras sean iguales a 2. Haz lo mismo pero con todas las cifras iguales a 3.

Problema 3 El anillo de polígonos



Un anillo simétrico está compuesto por m polígonos regulares idénticos, cada uno de n lados, de acuerdo con las siguientes reglas:

i. Cada polígono en el anillo toca exactamente a otros dos.
ii. Dos polígonos adyacentes tienen un lado común.
iii. El perímetro de la región interna (la parte encerrada por el anillo), consiste en exactamente dos lados de cada polígono del anillo.

El siguiente ejemplo muestra un anillo con $m=6$ y $n=9$.

¿Para qué valores de m y n son posibles anillos de este tipo?

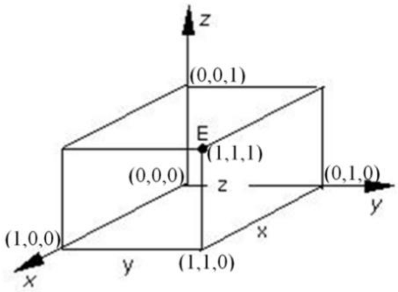
Problema 4 Un juego con dados

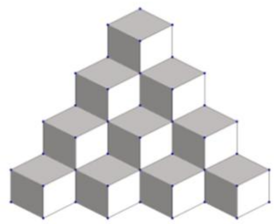
Ana, Bea y Clara han inventado un juego. Ponen en una mesa 60 dados, y por turnos (primero Ana, después Bea, y luego Clara) van retirando dados de la mesa a voluntad. Cada persona, cuando es su turno, sólo tiene tres opciones para retirar dados: 1 dado, 4 dados o 7 dados. El juego lo gana quien quite el último dado.

Si las tres son expertas en este juego, ¿quién ganará?

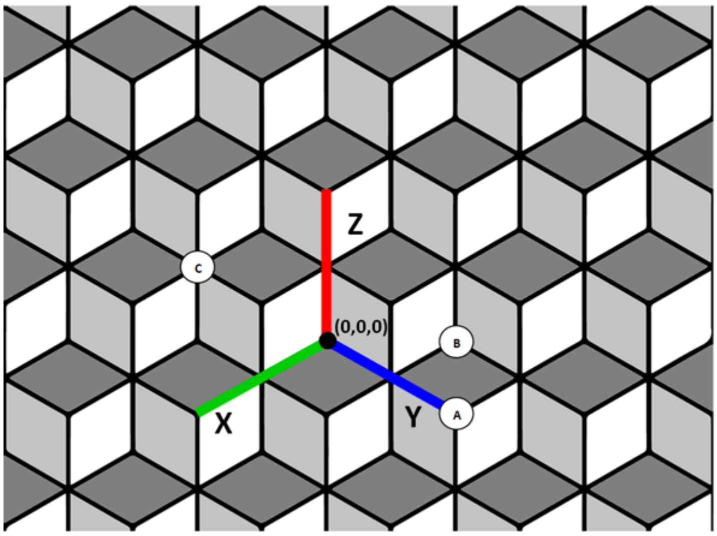
Problema 5 La pared infinita de cubos

Hay una pared en la que hay dibujada una trama que parece formada por una infinidad de cubos apilados, de arista unidad. Si fijamos un origen de coordenadas en un punto de la pared, a cada uno de los vértices de los cubos sobre la pared le podemos asignar unas coordenadas en 3 dimensiones (x, y, z) como muestra la figura:





Ejemplo de cubos apilados



Los puntos A, B y C de la figura tendrían en este ejemplo las coordenadas (x, y, z) siguientes: $A(0{,}2{,}0)$; $B(-1{,}1{,}0)$ y $C(1, -1{,}1)$. Fíjate que un punto con coordenadas cualesquiera puede no ser un vértice de un cubo de la pared. Por ejemplo el punto $(-1, -1, -1)$ o el punto $(1{,}1{,}1)$ no corresponden a ningún vértice de los cubos de la pared.

Se pregunta, teniendo en cuenta el origen de coordenadas dibujado en la figura, cuáles de los siguientes puntos corresponden a vértices de algún cubo de la pared y por qué:

$$P(125, -98, -27); \quad Q(335, -131, -219); \quad R(-107, 24, 79);$$
$$S(1379, -3432, 2055) \quad y \quad T(-129, 75, 55).$$

XXX OLIMPIADA NACIONAL

Jaén, 2019

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Problema 1 Castigo inquisitorial

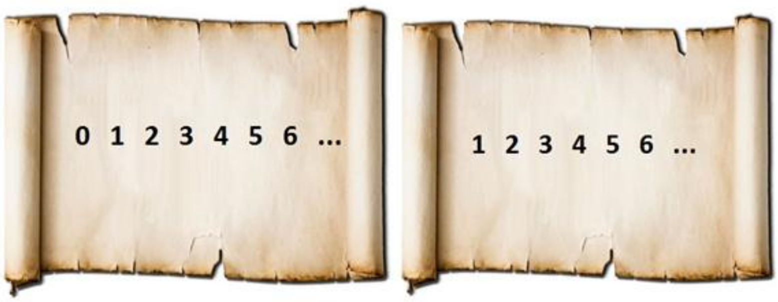
En el calabozo del castillo de Santa Catalina se encuentran dos reos encarcelados por la Santa Inquisición.

El inquisidor les da dos pergaminos, uno con los números del 0 al 100 y otro con los números del 1 al 101, escritos en fila y les dice:

Aquí tenéis estos dos pergaminos. Elegid cada uno el que desee y el que consiga el resultado cero colocando entre los números que tenéis ordenados, los signos "+" y "-" conseguirá la libertad.

Cada reo coge un pergamino y se pone a realizar las cuentas. ¿Conseguirán la libertad los reos? Si es así, debes explicar cómo lo conseguirán, y si desgraciadamente no lo hacen, debes explicar el por qué.

Todas tus respuestas deben estar razonadas.

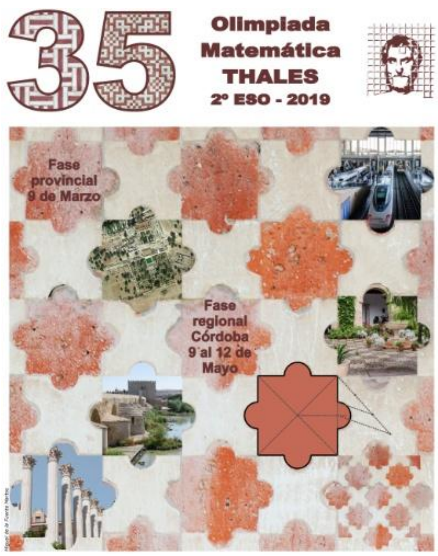


Problema 2 Participación en la olimpiada

A Enrique le gustan mucho las Matemáticas y siempre pone a su clase en un aprieto porque cada día viene con un enigma matemático.

Con motivo de la celebración de la Olimpiada Matemática Thales OMTH en su primera fase, la provincial, que se celebró el 9 de marzo, para ir preparando la prueba para este año les lanza el siguiente reto:

*"**Trece** niños y **f** niñas han participado en un concurso matemático de su colegio obteniendo un total de **11f+17** puntos. Si todos los participantes han obtenido el mismo número de puntos, ¿es posible determinar cuántas niñas han participado?"*



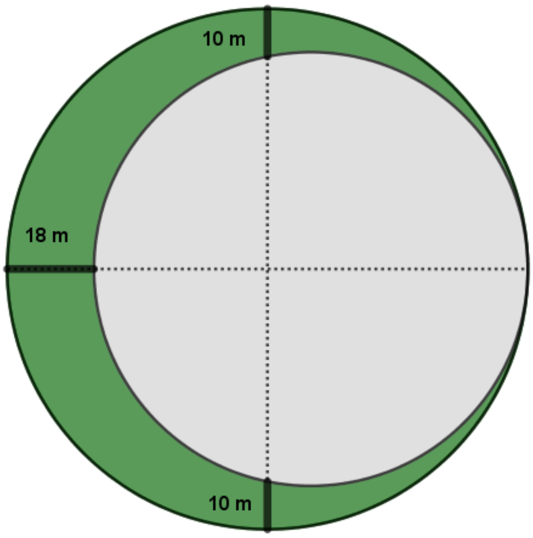
Para la segunda fase, la regional, compitieron 42 chicos y chicas. Las coordinadoras de Córdoba, que fue donde se celebró dicha fase tenían serios problemas con el número de habitaciones que debían reservar. Las habitaciones sería como máximo de tres olímpicos u olímpicas (no podían ser habitaciones mixtas), y debieron reservar las habitaciones antes de conocer el número de niños y niñas que pasaron a esta fase regional. ¿Cuántas habitaciones como mínimo reservaron para asegurarse que no se utilizasen habitaciones mixtas?

Razona todas tus respuestas.

Problema 3 El jardín

Se va a construir un nuevo instituto en Jaén, se llamará IES Thales, y delante de él, se va a diseñar una gran plaza circular donde una parte de ella se encontrará ajardinada, como se puede observar en la figura.

Calcula de forma razonada la superficie del jardín y el coste del césped si este se vende por paquetes de 50 m^2, con un precio de 302,50 € el paquete.



Problema 4 Competición Matemática

La Federación Española de Profesores de Matemáticas FESPM, ha organizado una competición entre sus sociedades. Cada sociedad inscribirá a dos equipos. En la competición, cada equipo se enfrentará con todos y cada uno de los de las otras sociedades, siendo cada enfrentamiento de dos equipos.

Si participan las sociedades de Andalucía, Valencia y Asturias, ¿cuántos enfrentamientos habrá?, ¿y si las participantes son las que iniciaron la I Olimpiada Nacional, que fueron Andalucía, Navarra, Canarias, Aragón, Castilla la Mancha y Murcia?

Escribe una expresión que indique el número de enfrentamientos según el número de sociedades participantes, y di cuántos enfrentamientos habrá si compiten las 19 delegaciones que están presentes en estas Olimpiadas Nacionales.

Razona tus respuestas.

Problema 5 La herencia

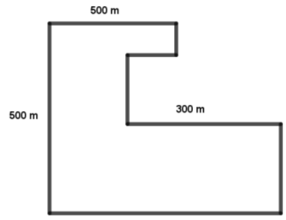
Luisa ha heredado de su tío Paco, una finca de cerezos en el término municipal de Alcalá la Real de Jaén, y ha decidido vallar el terreno antes de ir a verlo, por lo que pide información del mismo.

La abogada le envía la información que tiene. No sabe en realidad cuántos metros cuadrados tiene el terreno, pero sí su forma, y le adjunta por WhatsApp la siguiente figura del terreno advirtiéndole que el dibujo no es exacto, pero que los lados si son perpendiculares.

Averigua el perímetro de la finca para que Luisa pueda encargar la cantidad de valla necesaria y así poder cercar los cerezos de su tío Paco.

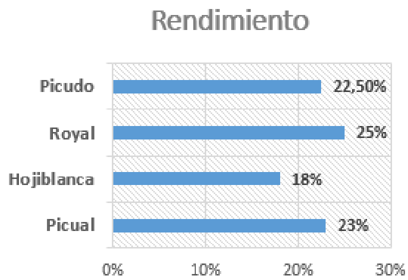
Con los datos que le ha enviado la abogada, ¿podría saber Luisa los metros cuadrados del terreno que acaba de heredar?

No olvides razonar todas tus respuestas.



Problema 6 Un mar de olivos

Hace cuatro años la familia Melgarejo experimentó con una nueva planta de olivo pequeña, que no crece mucho. Con este tipo se sembró una finca de olivos cuadrada de 16 hectáreas que estaba dividida en cuatro parcelas también cuadradas de 4 hectáreas cada una, y en cada parcela se plantó una variedad diferente, siendo estas variedades: picual, hojiblanca, royal y picudo. Hay que tener en cuenta que no se plantó ningún olivo en el perímetro de las parcelas. En ellas los olivos se distribuyeron de manera ordenada en diagonales paralelas de forma que las diagonales estaban separadas con una distancia de $\sqrt{2}$ m. En cada una de las diagonales, los olivos se situaron a una distancia de $\sqrt{2}$ m. ¿Cuántos olivos tienen cada una de las cuatro parcelas de la finca?



Los resultados han sido muy buenos y la familia está pensando en plantar una única parcela de 400 hectáreas de la variedad más común en la provincia de Jaén, la variedad picual. ¿Cuántas plantas de olivos se deberán adquirir para la nueva plantación?

En la campaña 2019 se ha recogido los siguientes datos sobre cada variedad de planta de la finca. ¿Qué variedad ha aportado una mayor cantidad de aceite? ¿Y qué cantidad de aceite ha cosechado la familia Melgarejo con esta nueva planta? El rendimiento de la variedad significa que por cada kilogramo de aceituna se obtiene el porcentaje de aceite que indica su rendimiento.

Picual	Hojiblanca	Royal	Picudo
6,8 Kg/olivo	8,2 Kg/olivo	6,2 Kg/olivo	7 Kg/olivo