XXVIII OLIMPIADA NACIONAL

Valladolid, 2017

Asociación Castellana y Leonesa de Profesores de Matemáticas «Miguel de Guzmán»

Problema 1 Organizando el VIII CIBEM

El CIBEM es un encuentro de profesores iberoamericanos de Matemáticas que todavía mantienen viva la llama de la ilusión por esta maravillosa tarea que es la educación matemática.

El I CIBEM se celebró en 1990 en Sevilla. Este año, 2017, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) organiza el VIII CIBEM, que se celebrará en Madrid del 10 al 14 de julio y al que acudirán 2000 profesores.

El primer día, para animar el tiempo de descanso entre sesiones, la organización propone a los asistentes el siguiente problema:

Varias personas en las redes sociales están hablando de un número; sabemos que dos de ellas mienten y todas las demás dicen la verdad:

La 1ª persona dice: "tiene 6 divisores impares"
La 2ª persona dice: "es múltiplo de 2"
La 3ª persona dice: "es múltiplo de 3"
La 4ª persona dice: "es múltiplo de 4"
La 5ª persona dice: "es múltiplo de 5"
La 6ª persona dice: "es múltiplo de 6"
La 7ª persona dice: "es múltiplo de 7"
La 8ª persona dice: "es múltiplo de 8"
La 9ª persona dice: "es múltiplo de 9"
La 10ª persona dice: "es múltiplo de 10"
La 11ª persona dice: "es inferior a 700"
La 12ª persona dice: "es inferior a 600"
La 13ª persona dice: "es inferior a 500"
La 14ª persona dice: "es superior a 350"
La 15ª persona dice: "es superior a 400"

¿Qué personas mienten? ¿De qué numero se trata? ¿Existe una única solución?

Problema 2 Jugando con dados

La probabilidad tiene su origen en los estudios de las posibilidades de ganar en juegos de azar. En el año 1650, el caballero De Meré, un francés aficionado al juego, se encontró con Blaise Pascal y le propuso un problema que ya se había discutido durante la Edad Media.

El juego consistía en que cada jugador elegía un número, tiraban un dado alternativamente y el que conseguía primero tres veces el número elegido, ganaba.

El problema que le propone De Meré a Pascal consiste en establecer cómo debían repartirse el premio si, al suspenderse el juego repentinamente antes de su finalización, uno de ellos había conseguido su número dos veces y su contrincante una vez.

Pascal le envía cartas a otro matemático famoso de la época; Pierre de Fermat, contándole este problema. En esta correspondencia empezaron a construirse los principios básicos de la probabilidad, que serían después recopilados y publicados por Huygens (1629-1695).

El profesor de Historia tiene una curiosa forma de utilizar las Matemáticas para elegir a cuales de sus 32 alumnos les va a preguntar. Cuando llega a clase lanza dos dados cúbicos y suma las puntuaciones conseguidas en cada uno de ellos. Del resultado de esta suma calcula los divisores y los múltiplos menores o iguales que 32. Los alumnos cuyo número en la lista de clase coincida con alguno de los números que ha obtenido, son a los que pregunta las lecciones y actividades del día.

a) ¿Quiénes son los alumnos que tienen posibilidades de que les pregunten todos los días?

b) ¿Existe algún alumno al que no preguntará nunca? ¿Quién o quiénes serán?

c) ¿Qué pares de números tienen que salir en los dados para que pregunte al menor número de alumnos?

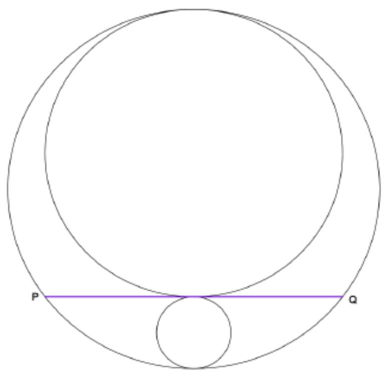
d) ¿Qué pares de números tienen que salir en los dados para que pregunte al mayor número de alumnos?

e) ¿Quién tendría menos posibilidades de que le preguntase: el alumno numero 14 o el numero 22?

Razona todas las respuestas.

Problema 3 Sangaku

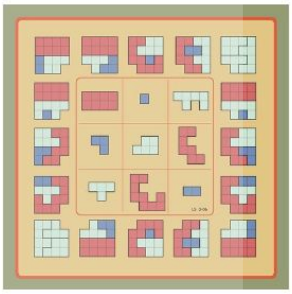
En las entradas de varios templos japoneses hay tablillas de madera ("sangaku", en japonés) con dibujos de problemas geométricos colgados allí "en honor de los dioses y para honra de sus autores". Algunos de ellos muestran configuraciones geométricas muy complicadas y su resolución puede ser muy difícil. El problema que presentamos aquí no procede de tan lejos, pero su configuración resulta en cierto modo similar a algunos de los originales.



Tres circunferencias son tangentes entre sí, como en la figura adjunta. La región del círculo exterior que no está cubierta por los dos círculos interiores tiene un área igual a 2π m^2.

Calcula la longitud del segmento $\overline{PQ}$

Problema 4 Cuadrados mágicos geométricos



*Un cuadrado es **geomágico** si al unir todas las piezas de una fila, columna o diagonal obtenemos siempre una figura del mismo tamaño y forma.*

Los cuadrados geomágicos fueron inventados en 2001 por el ingeniero electrónico británico Lee Sallows, aficionado a las Matemáticas recreativas.

La imagen corresponde a uno de estos cuadrados resuelto, extraído de su página web.

Entrar en ella supone un entretenimiento asegurado.

Ahora se trata de completar el cuadrado numérico que os proponemos.

En esta tabla de números, queremos que las flas (líneas horizontales) y las columnas (líneas verticales) formen progresiones aritméticas; es decir, que la diferencia entre dos números consecutivos (situados en una misma fila o en una misma columna) sea siempre el mismo valor en toda esa línea.

Inicialmente nos dan los cuatro valores que figuran en ella. ¿Es posible completar la tabla, con números naturales, para que todas sus líneas (horizontales y verticales) formen progresiones aritméticas?

Razona adecuadamente la respuesta.

	74			
				186
		103		
0				

Problema 5 La divina proporción

La Teoría de las Proporciones fue desarrollada por el astrónomo y matemático del siglo IV a.C. Eudoxo de Cnido y recogida por el gran matemático de la antigüedad, Euclides de Alejandría (325 a.C. - 265 a.C.) en el Libro V de sus famosos Elementos.

Desde su origen, el estudio de las proporciones ha permanecido vigente hasta la actualidad constituyendo un cuerpo doctrinal importante en el marco general de los currículos de distintos niveles educativos, tanto de Enseñanza Primaria como de Secundaria, Bachillerato y Universidad.

Vamos a considerar el siguiente conjunto de números:

$\boldsymbol{A_n = \{n, n+1, n+2, \cdots \cdots \cdots, n^2 - 4n\}}$ siendo $\boldsymbol{n}$ un número natural

a) Para $\boldsymbol{n = 6}$, escribe los números que forman el conjunto A_6. Encuentra, dentro de este conjunto, cuatro números que formen una proporción.
b) Haz lo mismo para $\boldsymbol{n = 7}, \boldsymbol{n = 8}$ y $\boldsymbol{n = 9}$.
c) Demuestra que si $\boldsymbol{n \geq 10}$, siempre se pueden elegir 4 números distintos del conjunto A_n de manera que con ellos se puede formar una proporción.