De frutas, poliedros y cristales

En este año 2011 se cumplen cuatrocientos años desde que el matemático y astrónomo Johannes Kepler formuló una conjetura que ha escapado de toda demostración hasta el 2006, año en que queda demostrada al 99%. La conjetura es muy simple: cuando un frutero apila las naranjas formando sus conocidas pirámides ¿está colocándolas de la mejor manera posible? Kepler no estaba tan interesado tanto en las frutas como en otra cosa menos comestible: las balas de cañón.

Tras cuatrocientos años y muchos intentos en el 2005 se aceptó una demostración hecha con ordenador que dice que la *respuesta es sí*. Después de la demostración del teorema de los cuatro colores para los mapas, la demostración de la conjetura de Kepler se ha convertido en la más célebre en la que la computadora es el auxiliar imprescindible. La demostración se debe a Thomas Hales que le dedicó más de seis años de encierro.

El sistema del frutero llena el 74% (exactamente, $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$) del espacio y no hay posibilidad de aumentar ese porcentaje con una red periódica. Un dodecaedro regular de esferas es mejor solución pero por desgracia con dodecaedros regulares no se llena el espacio, así que volvemos a lo mismo, el espacio requiere poliedros que completen, y el óptimo es el dodecaedro rómbico que propusimos construir en la actividad de cristalografía sólida.

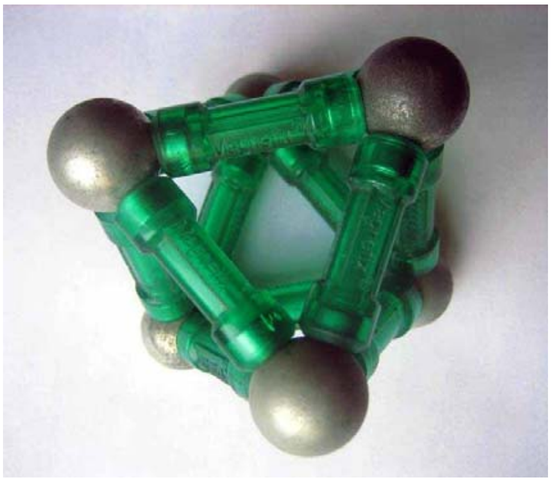
Lo interesante es que el problema del frutero ya lo había resuelto la naturaleza mediante la cristalografía.

Red cristalina cúbica centrada en las caras: octaedro, tetraedro y cubo.

Dos redes cristalinas optimizan la ocupación del espacio con átomos modelizados como esferas iguales: la red cúbica centrada en caras (FCC) y la red hexagonal compacta (CH). En ambas redes la ocupación es el 74%. La red hexagonal compacta es exactamente el problema del frutero, su poliedro asociado es una variante del dodecaedro rómbico. El dodecaedro rómbico es el poliedro de la celda de ocupación de cada átomo en el sistema cristalográfico *cúbico centrado en sus caras*: un cubo con un átomo en cada vértice más otro en el centro de cada una de sus caras. Con ella vamos a trabajar pues encontraremos toda una sinfonía de poliedros platónicos.

Ahora veamos como la red cúbica FCC contiene al tetraedro, al icosaedro y al cubo. Utilizaremos palillos o geomag para hacer el modelo:

- ✓ Construyamos primero un octaedro regular: 12 aristas y 6 vértices, cuatro aristas por cada vértice
- ✓ En cada una de las caras montamos un tetraedro regular obteniendo un octaedro estrellado.
- ✓ Si combinamos colores y en cada uno de los tetraedros los colores van alternados en dos colores distintos observamos algo bonito el octaedro es la figura intersección de una macla de dos tetraedros de longitud doble.
- ✓ Si nos fijamos ahora en los vértices de tres aristas vemos que forman un cubo y que tendremos un átomo tanto en sus vértices como en el centro de sus seis caras.



El modelo construido permite observar como en una misma figura hemos ensamblado ocho tetraedros de arista unidad, dos de arista doble, un octaedro de arista unidad y un cubo de arista que debes calcular.